

# Växjö universitet

Matematiska och system-  
tekniska institutionen

Marcus Nilsson

## Tentamen i Differential- och Integralkalkyl I, MAA 703, 5p

Måndagen den 20 mars 2006, klockan 8–13.

Tillåtna hjälpmedel: Bifogat formelblad  
Ej miniräknare

1. Bestäm följande gränsvärden:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$  (1p)

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^5}{8x^2 - 6x^5}$  (2p)

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + e^x}{3e^x + \ln(x^2)}$  (2p)

2. Skissa grafen till funktionen  $f(x) = x^2/(x - 1)$  genom att använda teckenstudium av första- och andraderivatan samt eventuella asymptoter. (5p)

3. Beräkna följande integraler:

(a)  $\int_2^4 \frac{4}{(x-1)(x+3)} dx$  (2p)

(b)  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$  (3p)

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + 16y(x) = \cos(4x).$$

*Ledning:* En lämplig ansättningen för en partikulärlösning är

$$y_p(x) = cx \sin(4x) + dx \cos(4x),$$

där  $c$  och  $d$  är konstanter. (4p)

(b) Bestäm den lösning i (a) som uppfyller,  $y(0) = 1$  och  $y'(0) = 1$ . (1p)

5. Beräkna volymen av den kropp (skål) som bildas när kurvan

$$y = \arcsin(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

roterar kring  $y$ -axeln. *Ledning:* Volymen av den rotationskropp som uppkommer då en växande funktionskurva  $y = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq a$  roterar kring  $y$ -axeln ges av

$$\int_{f(0)}^{f(a)} \pi (f^{-1}(y))^2 dy. \quad (5p)$$

6. Bestäm den funktion  $y(x)$ , definierad för  $x > -1$  och som uppfyller

$$y'(x) + \frac{x}{1+x}y(x) = 1 + x$$

och  $y(0) = 3$ . *Ledning:* Vid beräkningen av den integrerande faktorn kan det vara bra att konstatera att  $x = (1+x) - 1$ . (5p)

7. Beräkna längden av kurvan  $y = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 4$  då

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - (x-2)^2, & 1 \leq x < 3 \\ 4 - x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases} . \quad (5p)$$

8. Lös ekvationen

$$e \cdot e^x \cdot e^{x^2} \cdots e^{x^{99}} = e^{\frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x-1}}. \quad (5p)$$

*Lycka till!*

Lösningsförslag till tentamen i Differential- och Integralkalkyl I, MAA 703,  
5p

Måndagen den 20 mars 2006, klockan 8–13.

1. (a) Vi har

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3,$$

eftersom  $\sin(t)/t \rightarrow 1$ , då  $t \rightarrow 0$ .

- (b) Om vi delar både täljare och nämnare med  $x^5$  får vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^5}{8x^2 - 6x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x^2 + 3}{8/x^3 - 6} = -1/2.$$

- (c) Vi har

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + e^x}{3e^x + \ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2/e^x + 1}{3 + 2 \ln(x)/e^x} = 1/3,$$

eftersom  $e^x$  växer snabbare än både  $\ln(x)$  och  $x^2$ .

2. Sätt  $f(x) = x^2/(x-1)$  Vi börjar med att derivera. Vi får

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Vi ser att derivatan har nollställen för  $x = 0$  och  $x = 2$ . Både derivatan och andra-derivatan är odefinierade för  $x = 1$ , liksom funktionen själv.

Vi gör nu en teckenundersökning av derivatan:

$x$		0		1		2		
$f'(x)$		+	0	-	ej def	-	0	+
$f(x)$		↗	0	↘	ej def	↘	0	↗

och av andraderivatan

$x$		1		
$f''(x)$		-	ej def	+
$f(x)$		konkav	ej def	konvex

Vad det gäller asymptoter så är  $x = 1$  en lodrät asymptot eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Finns det då någon sned asymptot? Vi studerar gränsvärdet

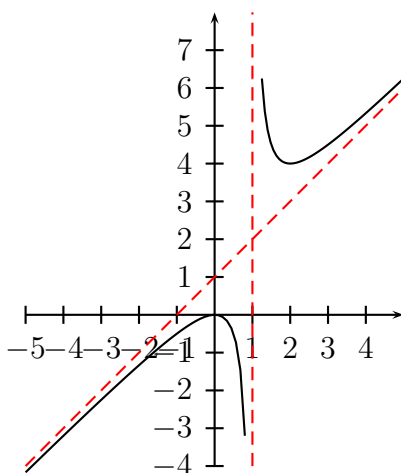
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

vilket är lutningskoefficienten för en eventuell asymptot. Vi studerar nu också

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

vilket leder till att  $y = x + 1$  är en sned asymptot både då  $x \rightarrow \infty$  och  $x \rightarrow -\infty$ .

Detta ger kurvan



3. (a) Vi har efter partialbråksuppdelning

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{4}{(x-1)(x+3)} dx &= \int_2^4 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} dx \\ &= [\ln(x-1) - \ln(x+3)]_2^4 = \ln(3) - \ln(7) - (\ln(1) - \ln(5)) = \ln(15/7). \end{aligned}$$

- (b) Vi partialintegrerar två gånger enligt följande

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= [-x^2 e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2x e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + [-2x e^{-x}]_0^1 + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - 2e^{-1} + 2[-e^{-x}]_0^1 \\ &= -3e^{-1} + 2(-e^{-x} + 1) = -5e^{-1} + 2. \end{aligned}$$

4. (a) Vi börjar med den homogena lösningen: Den karakteristiska ekvationen blir  $r^2 + 16 = 0$  vilken har lösningarna  $r = \pm 4i$ . Detta ger en homogen lösning på formen

$$y_h(x) = A \sin(4x) + B \cos(4x).$$

För att finna en partikulärlösning sätter vi

$$y_p(x) = Cx \sin(4x) + Dx \cos(4x).$$

Vi får

$$y_p'(x) = C \sin(4x) + 4Cx \cos(4x) + D \cos(4x) - 4Dx \sin(4x)$$

och

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= 4C \cos(4x) + 4C \cos(4x) - 16Cx \sin(4x) \\ &\quad - 4D \sin(4x) - 4D \sin(4x) - 16Dx \cos(4x) \\ &= 8C \cos(4x) - 8D \sin(4x) - 16Cx \sin(4x) - 16Dx \cos(4x). \end{aligned}$$

Stoppar vi in detta i DE får vi

$$8C \cos(4x) - 8D \sin(4x) = \cos(4x),$$

vilket ger  $C = 1/8$  och  $D = 0$ . Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y(x) = A \sin(4x) + B \cos(4x) + \frac{1}{8}x \sin(4x).$$

(b) Vi har

$$y'(x) = 4A \cos(4x) - 4B \sin(4x) + \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{2}x \cos(4x).$$

Begynnelsevillkoren  $y(0) = 1$  och  $y'(0) = 1$  ger

$$\begin{cases} 1 = B \\ 1 = 4A \end{cases}$$

Vi får alltså lösningen

$$y(x) = \frac{1}{4} \sin(4x) + \cos(4x) + \frac{1}{8}x \sin(4x).$$

5. Vi noterar först att om  $y = \arcsin(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  så är  $x = \sin(y) = f^{-1}(y)$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$ . Rotationsvolymen runt  $y$ -axeln blir därmed

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2(y) dy &= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2y)}{2} dy = \frac{\pi}{2} \left[ y - \frac{\sin(2y)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

6. En primitiv funktion till

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

är

$$x - \ln(1+x),$$

eftersom  $x > -1$ . En integrerande faktor blir därmed

$$e^{x-\ln(1+x)} = \frac{e^x}{1+x}.$$

Multipliserar vi DE med denna får vi

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{e^x}{1+x} y(x) \right) = \frac{e^x}{1+x} (1+x),$$

vilket ger

$$\frac{e^x}{1+x} y(x) = \int e^x dx = e^x + C,$$

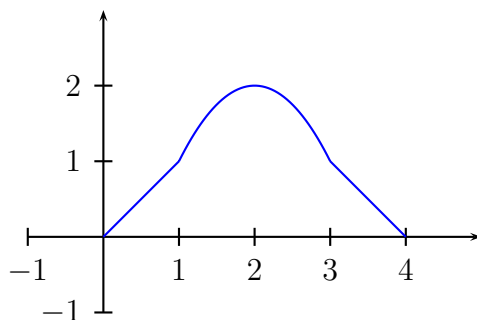
där  $C$  är en godtycklig konstant. Detta ger oss den allmänna lösningen

$$y(x) = 1 + x + C(1+x)e^{-x}.$$

Eftersom  $y(0) = 1 + C = 3$  så är  $C = 2$  och lösningen till DE är

$$y(x) = 1 + x + 2(1+x)e^{-x}.$$

## 7. Kurvan ser ut så här



Längden av linjerstyckena behöver inte beräknas med formeln utan vi kan direkt konstatera att deras sammanlagda längd är  $2\sqrt{2}$ . För kurvan mellan  $x = 1$  och  $x = 3$  så får vi  $f'(x) = -2(x-2) = -2x+4$  och längden blir därmed

$$\int_1^3 \sqrt{1 + (-2x+4)^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + (2x-4)^2} dx.$$

Sätter vi  $t = 2x - 4$  får vi  $dt = 2dx$  och integralen blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} t \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} - \ln(-2 + \sqrt{5}) \right) = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \left( \ln(2 + \sqrt{5}) - \ln(-2 + \sqrt{5}) \right). \end{aligned}$$

Längden av kurvan blir alltså

$$2\sqrt{2} + \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2 + \sqrt{5}}{-2 + \sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

8. Vi börjar med att omforma vänsterledet. Vi får

$$e \cdot e^x \dots e^{99} = e^{1+x+\dots+x^{99}} = e^{\frac{x^{100}-1}{x-1}},$$

enligt formeln för geometrisk summa.

Vi har nu omformat ekvationen till

$$e^{\frac{x^{100}-1}{x-1}} = e^{\frac{x^{100}-x^2+x-1}{x-1}},$$

vilket är ekvivalent med

$$e^{\frac{x^{100}-1}{x-1} - \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x-1}} = 1.$$

Detta kan i sin tur förenklas till

$$e^{\frac{x^2-x}{x-1}} = 1 \iff e^x = 1.$$

Denna ekvation har den enda lösningen  $x = 0$ .