

Gymnasieelevers kunskap om
potenser, exponentialfunktioner och
logaritmer

En undersökning om hur kunskaper om potenser, exponentialfunktioner och logaritmer förändras med tiden i en naturvetenskaplig klass.

Daniel Dragomir

Titel: ***Kunskap om potenser, exponentialfunktioner och logaritmer***, *En undersökning om hur kunskaper om potenser, exponentialfunktioner och logaritmer förändras med tiden i en naturvetenskaplig klass.*

Titel: ***Knowledge about powers, exponential functions and logarithms***, *A survey about the knowledge of powers, exponential functions and logarithms and its changes with time in a natural science class*

Abstrakt

Syftet med denna uppsats är att undersöka hur kunskaper om potenser, exponentialfunktioner samt logaritmer förändras med årskurserna i det naturvetenskapliga programmet på en gymnasieskola. Som bakgrund till syftet har en historisk återblick, en beskrivning av kursplaner samt en redovisning av läromedel, gjorts.

Diagnostiska test har utformats. Dessa har testat kunskaperna i de olika årskurserna och den slutsats som kan dras, är att kunskaper förbättras med årskurserna. Vidare har det med hjälp av diagnostiska test kartlagts vilka de vanligaste felen, som görs vid beräkningar med potenser, är. Den slutsats som kan dras av det, är att de fel som görs mest beror på fundamentala fel i talförståelse hos eleverna.

Uppsatsen har också väckt nya frågor, exempelvis kan de skillnader i kunskap, som upptäckts vid undersökningen generaliseras, och hur ska man göra för att förebygga de fel som eleverna gör?

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
2. Syfte	1
3. Problemformulering	1
4. Bakgrund	2
4.1 Den historiska framväxt av begreppet ”funktion”.....	2
4.2 Logaritmnas historiska framväxt	3
4.3 Potensers historiska framväxt.....	6
4.4 Symboler för logaritmer och exponentiella funktioner.....	7
4.5 Logaritmers praktiska användning.....	9
4.6 Redovisning av kursplan i matematik	10
4.6.1. Kursplan i matematik A	11
4.6.2. Kursplan i matematik B.....	11
4.6.3. Kursplan i matematik C.....	12
4.6.4. Kursplan i matematik D och E	12
4.7 Logaritmer, exponentialfunktioner och potenser i läroböcker.....	13
5. Metod	15
6 Procedur	15
6.1 Bearbetning av data.....	16
7. Resultat	17
8. Diskussion	23
9. Källförteckning	27
10. Bilagor	28
10.1 Bilaga A: Diagnostiskt test, årskurs 1.....	28
10.2 Bilaga B: Diagnostiskt test, årskurs 2.....	30
10.3 Bilaga C: Diagnostiskt test, årskurs 3.....	32
10.4 Bilaga D: Svarsblankett, årskurs 1.	34
10.5 Bilaga E: Resultat av diagnostisk test för NV1.....	35
10.6 Bilaga F: Resultat av diagnostisk test för NV2.	36
10.7 Bilaga G: Resultat av diagnostisk test för NV3.	37

1. Inledning

Målen för den här uppsatsen är att klargöra hur kunskaper om potenser, logaritmer och exponentialfunktioner förändras med årskursen hos elever i en naturvetenskaplig (NV) klass. Innan frågan behandlas ska en kortfattad historisk bakgrund till de centrala begreppen i uppsatsen ges. En kort redovisning hur dessa begrepp behandlas i kursplanerna och i en läroboksserie i matematiken, som används på vissa skolor, skall också ges. Målet med den empiriska undersökningen och med uppsatsen kommer att klargöras i följande stycken.

2. Syfte

Att undersöka hur kunskaper om potenser, exponentialfunktioner och logaritmer, förändras med årskurserna, i det naturvetenskapliga programmet på en gymnasieskola.

3. Problemformulering

Vilken kunskap har eleverna i årskurs 1, 2 och 3, på naturvetenskapliga programmet, om potenser? Hur förändras dessa kunskaper mellan årskurserna?

Vilken kunskap har eleverna om logaritmer och exponentialfunktioner, i årskurs 2 och 3? Hur förändras denna kunskap mellan årskurserna?

Vilka är de vanligaste felen som görs vid beräkning med potenser?

4. Bakgrund

4.1 Den historiska framväxt av begreppet ”funktion”

Idén till begreppet funktion kan spåras nästan två tusen år tillbaka i tiden. En definition av detta begrepp gavs dock inte förrän på 1700-talet. Den definition som vi använder oss av i dagens matematik är ännu yngre. Dagens definition är följande:

”Låt A och B vara två mängder och antag att vi har en regel som för varje x i A ger oss *exakt* ett element y i B. Vi har då en *funktion från A till B*. Om funktionen betecknas med f skriver man

$$f: A \rightarrow B \text{ eller } A \xrightarrow{f} B$$

för att tala om att f är en funktion från A till B. Mängden A kallas funktionens *definitionsmängd* (eller *definitionsområde*) och betecknas med D, medan B kallas funktionens *målmängd*. För att ange att elementet x i A tillordnas elementet y i B skriver man $x \mapsto y$ eller $y = f(x)$ och kallar $f(x)$ för *funktionsvärdet* i punkten x .”

Citat: Tengstrand A. m.fl., EnvariabelAnalys, 1991, sidan 76

Claudius Ptolemaios levde under perioden 85-160 efter Kristus. Han var en av den tidens mest framstående astronomer. Han gjorde astronomiska observationer i Alexandria och presenterade en modell för planeternas rörelser. Det är i samband med hans astronomiska beräkningar som man kan hitta den första idén till begreppet funktioner. Istället för att använda sig av diskreta värden, från tabeller, för att beskriva kontinuerliga fenomen, visade Ptolemy hur man skulle interpolera för att få funktionsvärden för vilken oberoende variabel som helst. Ptolemy använde sig inte av modern symbolism men ur hans arbeten står det klart att han var medveten om en funktionell relation.

Ett annat steg mot definitionen av funktioner togs av Rene Descartes. Descartes föddes 1596 i Touraien, Frankrike och dog 1650 i Stockholm. Vårt cartesianska koordinatsystem kan härledas till Descartes. Han tänkte sig alla algebraiska uttryck (t.ex. x , x^2 , x^3) som tal. Tidigare hade man betrakta x som en sträcka, x^2 som en area och x^3 som en volym. Att betrakta alla algebrariska uttryck som tal underlättar en grafisk framställning av funktioner vi använder i dag.

Självva ordet funktion introducerades av Gottfried Wilhelm Leibniz. Leibniz föddes i Leipzig, Tyskland, år 1646. Han dog i Hannover, Tyskland, år 1716. Leibniz är mest känd för sin uppfinning av differential- och integralkalkylen. Denna ära delar han med Newton. Det är i Leipzig arbeten med differential- och integralkalkylen som begreppet funktion hittas.

En definition av funktioner, gavs av Leonhard Euler, i hans arbete "Introductio in analysin infinitorum", 1748. Euler föddes 1707 i Basel, Schweiz, och dog 1783 i St Petersburg, Ryssland. Eulers bidrag till matematiken har varit väldigt stort. I ovannämnda arbete definierade han en funktion som en analytisk uttryck (d.v.s. som en formel). Definitioner för exponential- och logaritmfunktioner finns också att hitta i detta arbete. Alla moderna definitioner av dessa funktioner har sina rötter i Eulers definitioner.

Euler definierade en exponentialfunktion som en potens vars exponent är en variabel, $y = a^z$. Logaritmfunktionen definierade han som en invers till exponentiella funktionen, d.v.s. att z är logaritmen av y med basen a .

Tillämpning av funktioner inom olika områden, t.ex. inom fysiken, växte snabbt och en mer precis definition av begreppet funktion behövdes. Den definition som vi använder i dag har getts av Gustav Peter Lejeune Dirichlet. Han var en tysk matematiker som levde mellan 1805 till 1859.

4.2 Logaritmnernas historiska framväxt

Begreppet logaritmer blir en del av matematikens historia vid ett ganska sent stadium. Den person som kan kallas logaritmnernas fader, är John Napier. John Napier föddes 1550 i Merciston Castle som ligger i Edinburgh, Skottland. Han dog på samma plats (i Edinburgh), den 4 april 1617. Napier började sin undervisning när han var 13 år, vid St Andrew University. Där blev han intresserad av teologi. Napier fick dock inte sina kunskaper om matematik eller litteratur vid detta universitet. Dessa kunskaper fick han under den tid han tillbringade någonstans i Europa, exakt var vet man inte med säkerhet.

År 1571 återvände han dock till Skottland. Han var intresserad av jordbruk och var också inblandad i de religiösa konflikter, som fanns vid denna tid.

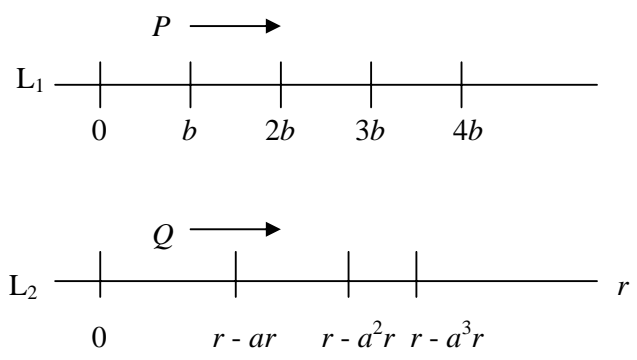
Hans intresse för matematik var endast en hobby, trots det har han lyckas lämna väsentliga bidrag inom detta ämne. Förutom att ha lagt grundidén till logaritmer, har han också hittat exponentiella uttryck för trigonometriska funktioner.

Idén till logaritmer kan ha sitt ursprung i användning av vissa trigonometriska funktioner, som transformerar multiplikation till addition eller subtraktion. Att hitta ett sätt att multiplicera och dividera stora tal, på ett mindre tidskrävande sätt och också minska risken för felberäkningar, var önskvärt. John Napier konstruerade logaritmtabeller som uppfyllde just detta syfte.

Napier publicerade sina tabeller för logaritmer 1614, i en bok som hette "Description of the wonderful canon of logarithms". Denna bok beskrev hur man skulle använda tabellerna. I en senare bok "Construction of the wonderful canon of logarithms", 1619, förklarade han hur dessa tabeller skulle konstrueras.

Napiers logaritmer, Nlog, skiljer sig från dagens logaritmer i vissa avseenden. Han betraktade inte logaritmer på ett algebrariskt sätt, utan använde sig av en dynamiskt analogi. Som definition för Nlog tänkte sig Napier två punkter, P och Q . Dessa rör sig på två separata och parallella linjer, L_1 och L_2 . P rör sig på L_1 och Q rör sig på L_2 .

L_1 delas in i intervall i enlighet med en aritmetisk serie: $0, b, 2b, 3b, \dots$, där 0 är den vänstra ändpunkten. L_2 delas in i intervall enligt en geometrisk serie: $0, r - ar, r - a^2r, r - a^3r, \dots$, där 0 är vänstra ändpunkten och r den högra. Se figur 1.



Napier valde att sätta r till 10 000 000 och att a skulle vara ett tal mindre än, men nästan lika med 1.

Punkten P rör sig aritmetiskt, med en konstant hastighet, på linjen L_1 och Q rör sig geometriskt på L_2 . Q :s hastighet förändras på sådant sätt att den hinner färdas över ett intervall på L_2 , under samma tid som P rör sig över ett intervall på L_1 .

Nlog definieras ur ovannämnda förhållanden, på följande sätt:

Punkten P och Q börjar röra sig, med samma hastighet från nollpunkterna på L_1 respektive L_2 . När P har färdats avståndet y från nollpunkterna på L_1 , kommer Q att vara på en punkt som befinner sig på avståndet x från r (den högra ändpunkten av L_2). Avståndet y sägs då vara logaritmen av x . Det vill säga:

$$y = N \log x.$$

Man kan också beskriva punkternas rörelser med hjälp av en differentialekvation, och på detta sätt hitta följande relation mellan Nlog och ln:

$$y = N \log x = r \ln (r/x)$$

Ett problem med Nlog är att Nlog 1 inte är lika med noll. Vilket gör det svårare att räkna med än med de vanliga logaritmerna.

Senare i sitt liv bestämde sig Napier för att låta Nlog 1 var lika med noll. Han framlade detta förslag för Henry Briggs (1550-1631) vid deras första möte, 1615.

Briggs arbetade vid Gresham College i London och han kom i kontakt med Napiers arbete, genom tidigare nämnda boken "Description of the wonderful canon of logarithms". Briggs skrev till Napier och föreslog att logaritmer skulle ha basen tio. Sommaren 1615 åkte han till Skottland och träffade Napier.

Napier dog innan han hann börja konstruera nya tabeller för logaritmer. Men Briggs började om från grunder och beräknade nya tabeller med $\log 1 = 0$ och med basen tio.

Utvecklingen av logaritmer betydde mycket för beräkningar inom astronomi.

Den franske matematikern Pier Simon Laplace yttrade sig om det bidrag som uppfinningen av logaritmer har gett astronomerna, på följande sätt:

”...by shortening the labors, and doubled the life of the astronomer...”

Som tidigare nämnt blev logaritmer definierad som funktion av Euler i sitt arbete ”Introductio in analysin infinitorum” från 1748.

4.3 Potensers historiska framväxt

Potenser är väldigt användbara när stora och små tal skall uttryckas, till exempel avstånd mellan stjärnor eller diametern hos en elektron. Potenslagar kan användas när sådana tal multipliceras eller divideras. För att beräkning med potenser skall vara möjlig måste ett tal-positionssystem vara uppfunnet, det vill säga att ett tal får olika värde beroende på sin position (ental, tiotal o.s.v.) i ett en- eller flersiffrigt tal.

Vårt decimala tal-positionssystem har sitt ursprung i den indiska matematiken.

I en legend om en indisk Brahmin vid namn Sessa, hittar vi en idé till användning av potenser. Sessa hade, enligt legenden, uppfunnit Shaturanja (ett spel som liknar vårt schack och spelas på ett liknande bräda med 64 rutor). Kungen av Indien blev imponerad av detta spel och ville belöna Brahminen med vad en denna önskade sig. Sessa sa att han endast önskade sig ett vetekorn för första rutan på spelbrädan, två för nästa ruta, fyra för nästa etc. Kungen (som inte kände till potenser) tyckte att detta var ett blygsamt önskemål. När hans matematiker fick räkna på det insåg de att det inte fann tillräckligt med vete i hela världen för att kunna uppfylla önskemålet, eftersom mängden blev 2^{64} vetekorn. Även om tankesättet i beräkningarna liknar den som används idag vid beräkning med potenser, dröjde det längre innan den terminologi som vi använder kom till liv. Här följer några små nedslag i historien som har lett till den terminologin som vi använder idag.

Positiva tal som exponenter användes av Nicole Oresme (1323-1382), men han använde inte samma skrivsätt som vi gör. James Humes använde sig också i ett verk från 1636 av exponenter. Han var väldigt nära den symbolism som används idag. René Descartes (1596-1650) var först med att använda sig av heltal som exponenter som vi gör i dag.

Negativa heltalsexponenter användes av Nicolas Chuquet (1445-1488) i sitt arbete "Le Triparty en la Science des Nombres", skriven 1484. Med modern symbolism skrevs negativa heltalsexponenter av Isac Newton (1643-1727) i ett brev till Henry Oldenburg.

Newton var också först med att använda sig av tal i bråkform som exponenter. (ref: <http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html>)

Vårt sätt att se potenser som tal oavsett exponent har inte alltid funnits. Innan Rene Descartes tolkades potenser genom geometriska figurer, dvs. ett tal a^2 var en area och a^3 en volym. Descartes var, i sitt arbete "La Géométrie", först med att betrakta potenser som tal

När algebra och geometrin började förenas uppkom också några av de namn som vi använder för vissa exponenter. Till exempel kallade al- Khwarrizmis en obekant storhet x^3 för "kab" som motsvarar kub på svenska eller "cube" på engelska. Man kan generellt, d.v.s. inte bara vad namn avser, säga att potenser är barn födda i äktenskapen mellan algebra och geometri.

4.4 Symboler för logaritmer och exponentiella funktioner

Leonardo Euler vars definitioner för funktioner nämnts tidigare, var också den som introducerade symbolen $f(x)$ för funktioner. Symbolen för funktioner som används i dag hittas för första gången i boken "Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae" från 1734 som skrevs av Euler.

Från internet kan följande redovisning av användningen av symbolerna Log, log och ln för logaritmer läsas:

" Log. (with a period, capital "L") was used by Johannes Kepler (1571-1630) in 1624 in "Chilias logarithmorum" (Cajori vol. 2, page 105)

log. (with a period, lower case "l") was used by Bonaventura Cavalieri (1598-1647) in "Directorium generale Vranometricum" in 1632 (Cajori vol. 2, page 106).

log (without a period, lower case "l") appears in the 1647 edition of "Clavis mathematicae" by William Oughtred (1574-1660) (Cajori vol. 1, page 193).

ln (for natural logarithm) was used in 1893 by Irving Stringham (1847-1909) in "Uniplanar Algebra" (Cajori vol. 2, page 107)."

Citat:<http://members.aol.com/jeff570/functions.html>

Talet e gjorde sitt intåg i matematiken, under den beteckning som vi är vana vid i dag, i ett av Eulers böcker (se tabell 1.). Talet har dock funnits i matematiker sedan Napiers arbete på logaritmer, 1618. På den tiden betraktades logaritmer inte som algebrariska uttryck och därför tillkännagavs inte talet e som en bas för naturliga logaritmer.

Första gången talet e fick en egen beteckning var i ett brev, 1690, som Leibniz skrev till Huygen (1629-1695). Där fick talet beteckningen b . En redovisning av symbolerna som används för att beteckna talet e , vem som använde symbolerna och när, ges i tabell 1 på nästa sida.

Tabell 1.

1690	b	Leibniz	Brev till Huygens
1691	b	Leibniz	Brev till Huygens
1703	a	En recensent	<i>Acta eruditorum</i>
1727/8	e	Euler	<i>Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta</i>
1736	e	Euler	<i>Mechanica sive motus scientia analytice exposita</i>
1747	c	D'Alembert	<i>Histoire de l'Académie</i>
1747	e	Euler	Artiklar
1751	e	Euler	Artiklar
1760	e	Daniel Bernoulli	<i>Histoire de l'Académie r. d. sciences</i>
1763	e	J. A. Segner	<i>Cursus mathematici</i>

1764	<i>c</i>	D'Alembert	<i>Histoire de l'Académie</i>
1764	<i>e</i>	J. H. Lambert	<i>Histoire de l'Académie r. d. sciences et d. belles lettres</i>
1771	<i>e</i>	Condorcet	<i>Histoire de l'Académie</i>
1774	<i>e</i>	Abbé Sauri	<i>Cours de mathématiques</i>
1775	<i>e</i>	J. A. Fas	<i>Inleiding tot de Kennisse en het gebruyk der Oneindig Kleinen</i>
1782	<i>e</i>	P. Frisi	<i>Operum tomus primus</i>
1787	<i>c</i>	Daniel Melandri	<i>Nova Acta Helvetica physico-mathematica</i>

Originaltabell har hämtats från: <http://members.aol.com/jeff570/constants.html>

4.5 Logaritmers praktiska användning

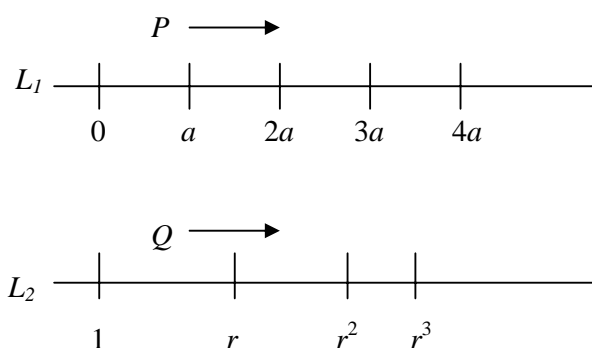
Logaritmer var tidigare ett användbart redskap vid räkningar med stora tal. Det underlättade beräkningar för astronomer. I och med uppfinandet av miniräknare och datorer har logaritmernas roll som hjälpredda vid beräkningar försvunnit. Andra användningsområden har dock funnits för logaritmer sen deras upptäckt och nya användningsområden har upptäckts.

Att arean under hyperbeln $y = \frac{1}{x}$ har logaritmiska egenskaper upptäcktes av A. A. de

Sarasa som hade läst Gregoty St. Vincent (1584-1667) arbeten om cirkelns kvadratur.

Sedan Eulers definition av logaritmiska funktioner har logaritmer blivit betraktade som exponenter. Detta har möjliggjort användningen av logaritmer för att lösa diverse ekvationer samt gestalta diverse fenomen inom naturvetenskapen och andra områden, t. ex. ekonomi och psykologi. Ett exempel från psykologin är Gustav Frechners logaritmiska samband som beskriver sambandet mellan graden av upplevd sensoriska intryck och storleken på stimuli. (ref: Kellog R., Cognitive Psykologi,1995, Sage publication.)

Principen bakom Napiers definition av logaritmer, dvs. förhållandet mellan en aritmetisk och geometrisk serie, kan användas för att introducera logaritmer på gymnasiet. Utgångspunkten är den samma. Två punkter P och Q rör sig på var sin linje, L_1 och L_2 . L_1 är en linje där en aritmetisk följd $(0, a, 2a, \dots)$ representeras och L_2 är en linje där en geometrisk följd $(1, r, r^2, \dots)$ representeras. Se figur 2.



P och Q börjar röra sig samtidigt från 0 respektive 1. Det tar lika lång tid för P att röra sig över ett intervall på L_1 som det tar för Q att röra sig ett intervall på L_2 och varje intervall på respektive linjer passera under samma tid.

Likt Napier kan man då Q har färdats avståndet x och P avståndet y definiera logaritmen av x som y .

Ur dessa förutsättningar kan även logaritmlagarna introduceras. Hur det görs kan läsas i "Learn from the Master" av Swetz F. m.fl. (1995).

4.6 Redovisning av kursplan i matematik

En redovisning av de olika kursplanerna i matematik följer nedan. Ur varje kursplan har de delar som är väsentliga för mitt diagnostiska test, plockats ut. Alla citat som följer har hämtats från följande sida på nätet:

"www3.skolverket.se/ki/SV/0102/sf/21/ol/index.html"

4.6.1. Kursplan i matematik A

Ur de olika mål som eleven ska ha uppnått efter avslutad kurs, är följande mål relaterade till min problemformulering. Att:

”kunna ställa upp och tolka linjära ekvationer och enkla potensekvationer samt lösa dem med för problemsituationen lämplig metod och med lämpliga hjälpmedel”

Samt att:

”kunna ställa upp, tolka, använda och åskådliggöra linjära funktioner och enkla exponentialfunktioner som modeller för verkliga förlopp inom privatekonomi och i samhälle”

4.6.2. Kursplan i matematik B

I kurs B är de mål som är relevanta, att:

”kunna tolka, förenkla och omforma uttryck av andra graden samt lösa andragradsekvationer och tillämpa kunskaperna vid problemlösning”

Samt att:

”kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former samt lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder”

Vidare ska eleven:

”kunna förklara vad som kännetecknar en funktion samt kunna ställa upp, tolka och använda några icke-linjära funktioner som modeller för verkliga förlopp och i samband därmed kunna arbeta både med och utan dator och grafritande hjälpmedel”

4.6.3. Kursplan i matematik C

I denna kurs ska eleven:

”kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning”

Eleven skall också:

”kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner”

samt:

”kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs”

4.6.4. Kursplan i matematik D och E

I kurserna D och E fortsätter man att utveckla de kunskaper som man antas ha från tidigare kurser. Dessutom integrerar man de gamla kunskaperna med nya, t.ex. ska man kunna härleda deriveringsreglerna för logaritmfunktioner.

Derivering av exponentialfunktioner och logaritmer innefattas inte i denna undersökning.

Dedignostiska test som har använts kan ändå tillämpas på de elever som läser kurs D och E, eftersom följande mål finns i båda kursplanerna:

”kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser”.

4.7 Logaritmer, exponentialfunktioner och potenser i läroböcker

Hur logaritmer, exponentialfunktioners och potenser introduceras i läroböcker kommer att redovisas. Den läroboksserie som har studerats är: ”Delta, Matematik för gymnasiet, kurs A, B, C, D och E.”

Potenser introduceras i kurs A och ”Delta, Matematik för gymnasiet kurs A+B” på följande sätt: Kunskaper från grundskolan, dvs. begreppen potens, exponent och bas, repeteras kortfattat. Räkneuppgifter som innefattar: beräkning av tal i potensform och att skriva multiplikation av samma tal i potensform följer.

Därefter redovisas potenslagarna för multiplikation, division, upprepad potensbildning och för potenser med olika baser. Som en följd av lagarna definieras $a^0 = 1$ och $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exponenten n tillåts i de ovannämnda lagarna endast anta heltalsvärden.

Räkneuppgifter som kräver användning av lagarna ges. Vissa uppgifter är tillämpningar av potenslagarna i verkliga sammanhang och andra är ”Visa att..” uppgifter.

Kapitlet avslutas med en sammanfattning av potenslagarna och definitionerna.

Exponentialfunktioner och logaritmer ingår i kurs B och introduceras i ”Delta, Matematik för gymnasiet kurs A+B” på följande vis:

Två inledande uppgifter om tillämpningar av exponentialfunktioner i verkliga sammanhang ges. Exempelen handlar om lufttryck respektive ränta. Genom diskussion kring dessa exempel introduceras begreppen exponentialfunktion och exponentiell förändring.

Exponentiell förändring jämförs därefter med linjär förändring och en definition av formen för en exponentialfunktion ges.

Detta följs av exempel på hur exponentialfunktioner kan åskådligt göras grafiskt.

Räkneövningar som är rankade i olika tillämpningsområden ges, exempelvis ska ränta, befolkningsmängd och strålningsintensitet beräknas.

För att introducera logaritmer används exponentialfunktioner. Här används en grafisk bild av $y = 10^x$. Det tas upp att för varje värde på x finns ett värde på y . Därför är det troligt att det omvända gäller för alla positiva y värden, dvs. att till varje y finns precis ett motsvarande

värde för x , ($10^x = y$). Här kallas exponenten x för logaritmen för y och betecknas $x = \log y$.

Följande samband konstateras:

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log y$$

Därefter förklaras att sambandet kan användas för att lösa ut exponenter ur ekvationer av typen $a = 10^x$.

Några exempel ges som följs av räkneövningar.

Kapitlet avslutas med ett exempel från kemin, där pH-värdet förhåller sig logaritmiskt till vätejonkoncentrationen. Exemplet följs av räkneövningar på temat.

Boken ”*Delta, Matematik för gymnasiet kurs C+D*” har samma struktur som föregående bok därför kommer inte räkneövningar att nämnas trots att varje delmoment följs av sådana. Det begrepp som introducerats tidigare utvecklas.

Kapitlet om exponentialfunktioner inleds med ett exempel från kemin som behandlar cellers exponentiella tillväxt i en jästkultur. Potenslagar och funktionsbegreppet repeteras. Längre fram i kapitlet utvidgas begreppet potenser genom att låta exponenten n väljas godtyckligt.

Exponentialfunktioner repeteras sedan och basen e introduceras med hjälp av en grafisk framställning. Ett exempel från ellära ges.

Logaritmer repeteras och man preciserar här att en logaritm till exponentialfunktionen $y = 10^x$, kallas tiologaritmen. Vidare ges några exempel på hur man löser ekvationer av typen $a^x = b$.

Med liknande resonemang som för logaritmer, introduceras den naturliga logaritmen.

Logaritmlagarna introduceras därefter och en av lagarna härleds med hjälp av potenslagarna.

I boken ”*Delta, Matematik för gymnasiet kurs E*” utvecklas inte kunskaperna om logaritmer, exponentialfunktioner och potenser för reella tal.

5. Metod

Syftet med uppsatsen medför att den får en deskriptiv utformning, En klass har valts från varje årskurs. Samma klass har alltså inte följts genom alla tre åren.

En empirisk kvantitativ undersökning har gjort för att besvara problemformuleringen.

De variabler som undersöks är årskurs samt kunskaper om logaritmer, exponentiella funktioner och potenser varierar för olika årskurser.

6 Procedur

Tre stycken diagnostiska test har utformats för att mäta den önskade kunskapen om logaritmer, exponentialfunktioner och potenser. Testen finns som bilagorna A, B och C.

Varje test utformades för att motsvara de kunskaper som den undersökta årskursen antas besitta. Det var till exempel ingen mening att undersöka kunskaper om logaritmer i årskurs 1 eftersom logaritmer inte hade introducerats.

För att mäta kunskaper om potenser användes uppgifterna 1-5 i det diagnostiska testen och för att mäta kunskaper om logaritmer och exponentialfunktioner användes uppgifterna 6-8 i testen för årskurs 2 och 3. Uppgifterna 1-5 var likadana i alla tre testen, detta för att en genomförelse mellan årskurserna skulle vara möjligt. Av samma anledning var uppgifterna 6-8 identiska mellan testen för årskurs 2 och 3.

Uppgift 6 i testet för årskurs 1 samt uppgifterna 9 och 10 i testet för årskurs 3, användes inte i jämförelsen.

Svaren till frågorna fylldes i på en, till varje test, medföljande svarsblankett. Ett exempel på svarsblankett till årskurs 1 finns i Bilaga D. Årskurs 2 och 3 hade liknande svarsblanketter.

Maxpoängen för diagnostiska testet för årskurserna 1, 2, och 3 var: 11, 16 respektive 19.

Kontakt togs med tre stycken lärare på en gymnasieskola och dessa tillfrågades om möjligheten fanns att utföra testen i deras klasser. En naturvetenskaplig (NV) klass från årskurs 1, 2 respektive 3 blev tillgängliga för undersökning, tack vare lärarnas hjälp och samtycke.

Totalt undersöktes 64 elever. Antalet elever i respektive årskurs redovisas i tabell 2.

Tabell 2.

Klass.	Antal elever.
NV1	22
NV2	23
NV3	19

6.1 Bearbetning av data

För varje rätt svar på en uppgift eller en deluppgift gavs en poäng. Ett undantag var uppgift 10 i den diagnostiska testen för årskurs 3 som gav två poäng.

För varje elev i NV1 sammanställdes, genom rättning av provet, två värden. Den ena var de resultat som eleven hade på uppgifterna 1-5 och den andra var det totala resultatet på testet.

Varje elev i NV2 tilldelades tre värden: Ett för resultat på uppgifterna 1-5, ett för uppgifterna 6-8 och ett värde för det totala resultatet.

I NV3 fick varje elev tre värden: Ett för resultat på uppgifterna 1-5, ett för uppgifterna 6-8 och ett värde för det totala resultatet.

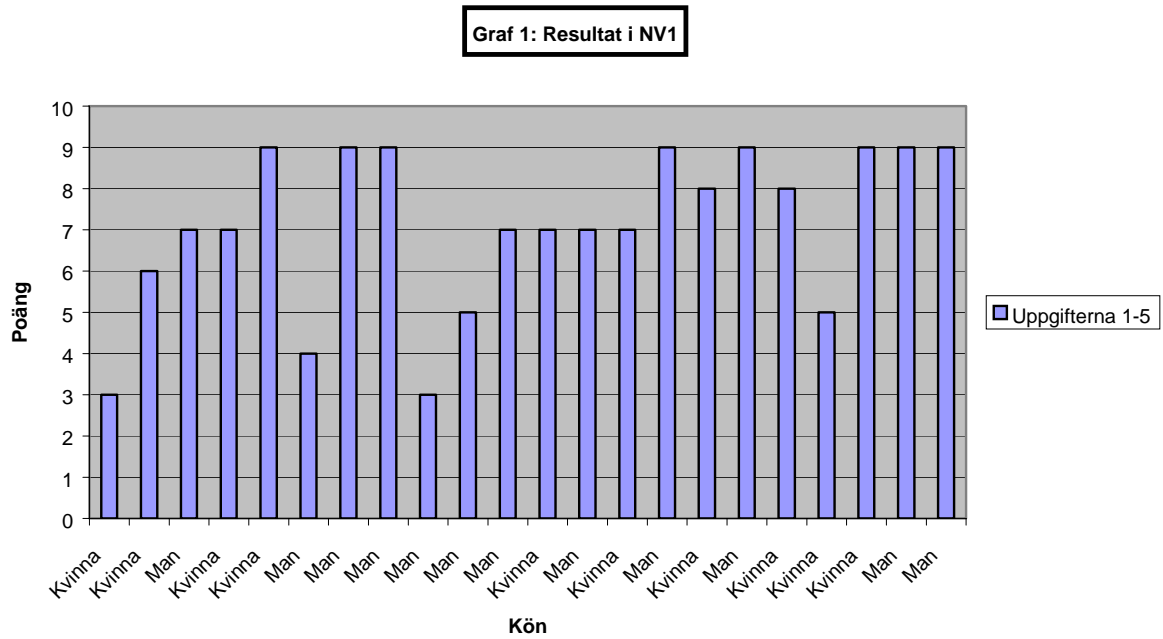
Följande jämförelse gjordes mellan:

- * NV1 och NV2 med uppgifterna 1-5 som jämförelsegrund
- * NV2 och NV3 med uppgifterna 1-5 som jämförelsegrund
- * NV1 och NV3 med uppgifterna 1-5 som jämförelsegrund
- NV2 och NV3 med uppgifterna 6-8 som jämförelsegrund
-

För att ta reda på de vanligaste felen, har varje fel som gjorts och dess förekomst noterats. En sammanställning av felen redovisades i en tabell. De mest förekommande felen redovisas först. Eftersom endast svar fanns att tillgå kunde endast troliga orsaker till felen klargöras.

7. Resultat

Resultatet från diagnostiska testet för NV1 redovisas i graferna nedan:

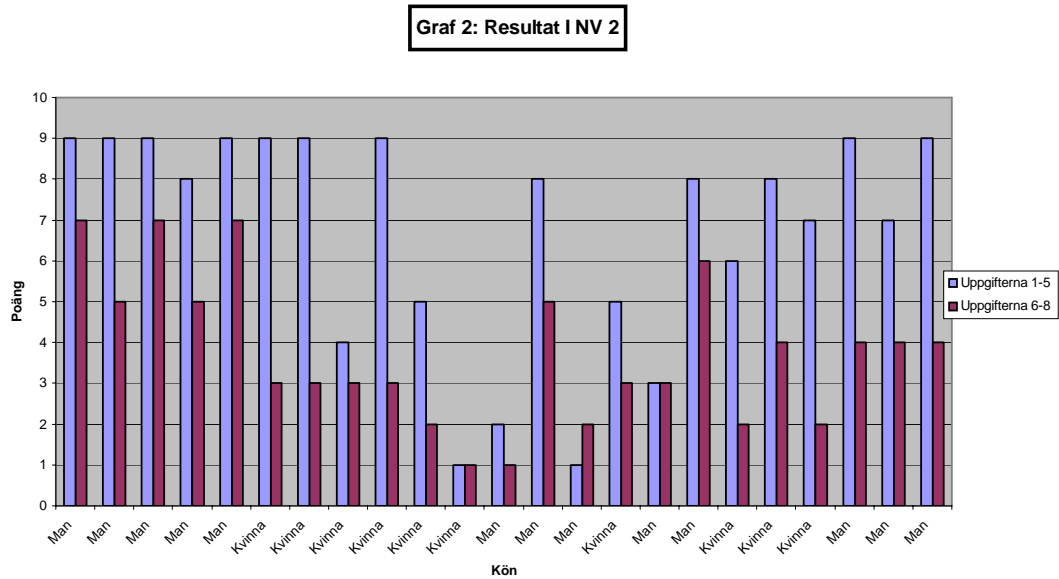


Beräkningar i Excel gav följande värden i NV1:

Tabell 3.

Statistisk beräkning av:	Uppgifterna 1-5
Medelvärde	7,09
Standardavvikelse	2.00
Median	7

Resultatet för diagnostiska testet i NV2 redovisas nedan:



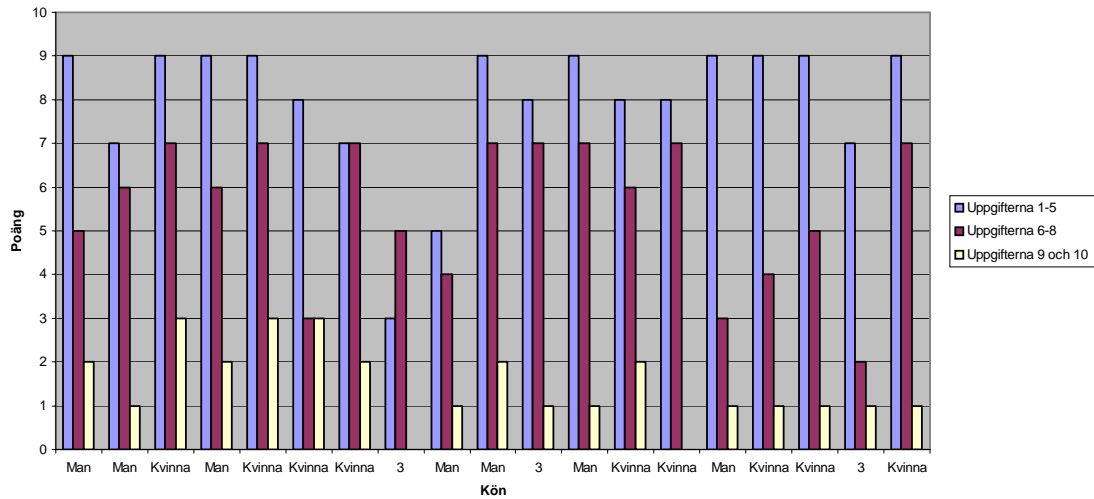
Beräkningar i Excel gav följande värden i NV2:

Tabell 4.

Statistisk beräkning av:	Uppgifterna 1-5	Uppgifterna 6-8	Alla uppgifterna
Medelvärde:	6,70	3,74	10,43
Standardavvikelse	2,77	1,81	4,23
Median	8	3	12

Resultatet för diagnostiska testet i NV3 redovisas nedan:

Graf 3: Resultat i NV3



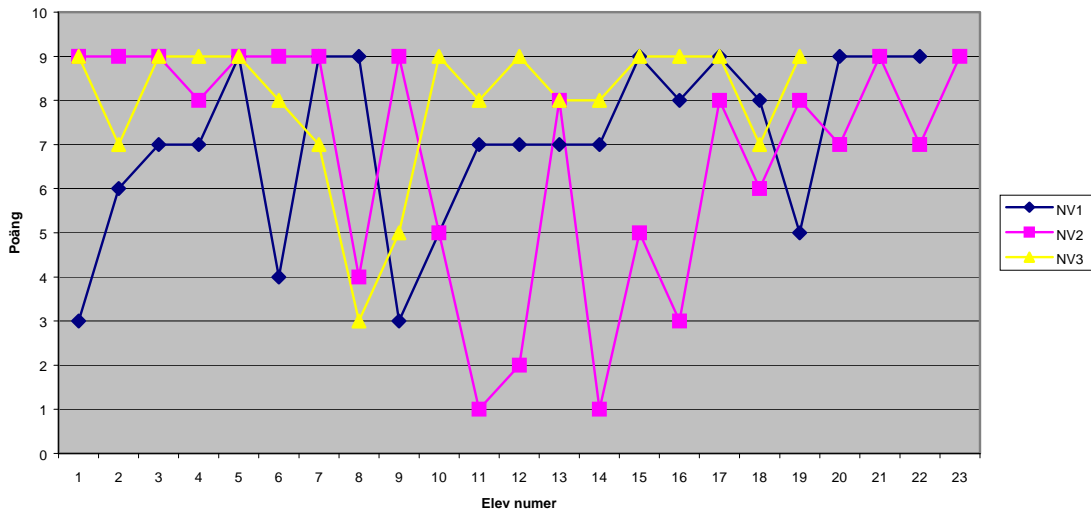
Beräkningar i Excel gav följande värden i NV3:

Tabell 5.

Statistisk beräkning av:	Uppgifterna 1-5	Uppgifterna 6-8	Alla uppgifterna
Medelvärde:	7,95	5,53	15,05
Standardavvikelse	1,61	1,65	
Median	9	6	16

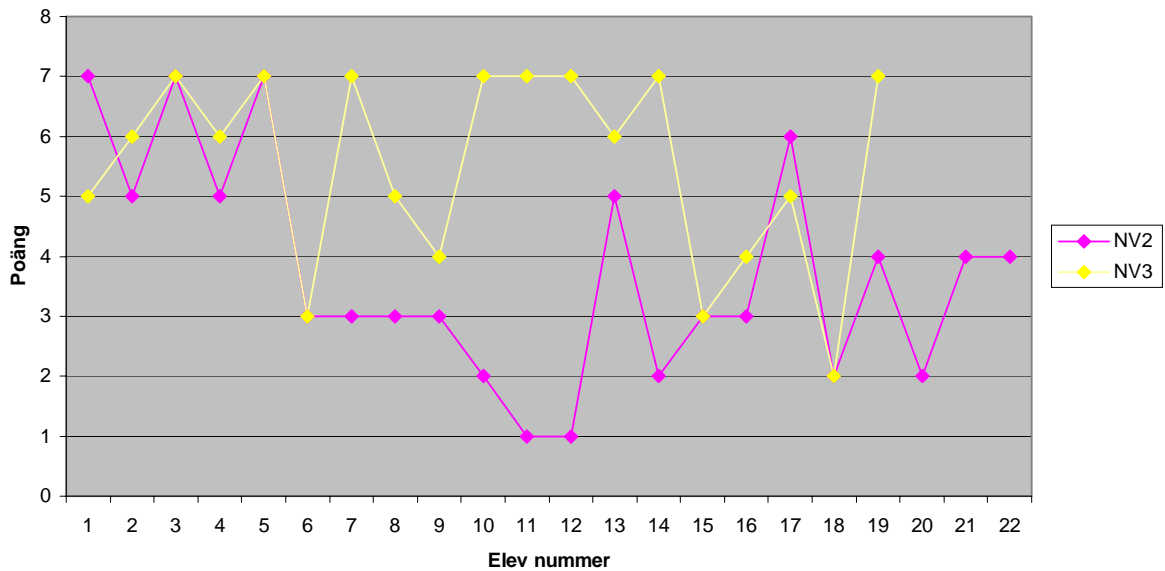
Jämförelse av uppgifterna 1-5 mellan NV - klasserna:

Graf 5: Jämförelse av uppgifterna 1-5 mellan NV- klasserna



Jämförelse av uppgifterna 6-8 mellan NV-klasserna.

Graf 6: Jämförelse av uppgifterna 6-8 mellan NV-klasserna



Resultaten för varje enskild elev i NV1, NV2 och NV3 finns i Bilagorna E, F och G.

Resultat av vanligaste typ av fel som gjordes i alla tre NV-klasserna:

Tabell 6: Typ av fel.

Uppgiftsnummer	Typ av fel 1	Förekomst	Trolig orsak	Typ av fel 2	Förekomst	Trolig orsak	Övriga typer av fel (förekomst 1)
1a	125^{3x}	6	Basen har upphöjts till tre men trean har inte tagits bort från exponenten.	5^{x^3}	2	Potens lagen har missförstått. Exponenterna multipliceras istället för att adderas.	$(5^x)^x$, 25^{3x} , 125
1b	4^{6x}	8	Baserna har multiplicerats.	2^{8^x}	2	Talen i exponenten multipliceras och upphöjs av någon anledning till x . Eleven kan inte förenkla ett polynom.	256^{x^2} , y^{2x4x} , $\frac{4^x 16^x}{4^x 8^x}$
2a	1^{3x}	2	Baserna i täljaren och nämnaren har dividerats.	1^4	1	Basen och x i exponent har förkortats	1^{4x} , $3x$, 13^x , 6^4
2b	1^{4x}	5	Baserna i täljaren och nämnaren har dividerats, samt minustecken glömts i exponenten	3^{-5x}	1	Eleven har glömt att det i täljarens exponent finns en 1:a framför x .	$\frac{1}{3^{4x}}$; $\frac{5}{1^{5x}}$; 8^{4x} ; 1^5 ;
3a	16^{4x}	8	Basen upphöjs till fyra men fyran tas inte bort från exponenten.	3^{xy}	2	Har troligen skrivit svaren till uppgift 3b	$(16^x)^3$; 2^{x+4} ; 3^{x+y} ; 8^x ; 2^{x^4}
3b	$3^x y$	1	Eleven har multiplicerat basen med exponenten.	$3y^{4x}$	1	Eleven kan ha chansat.	
4a	$(2a)^{2x}$	2	Har adderat	$2x$	1	Eleven har glömt	

			baserna i täljaren			att skriva basen	$(2a)^x; 4x; a^x$
4b	$a^x b$	2	Eleven har förkortat exponenterna för potensen med basen b .	ab^x	1	Eleven har först multiplicerat baserna i täljaren och därefter använt sig av potenslagarna.	$a^x; \frac{1}{2}a^x;$ $0,5a^{1,25x};$ $a^x - a^x;; ab^{6x};$ $a^{-x}b^{2x}$
5	a	4	Funktionen börjar vid 1 på y-axeln.	c	2	Eleven kan ha chansat.	

8. Diskussion

Den första problemformuleringen var:

”Vilken kunskap har eleverna, i årskurs 1, 2 och 3 på naturvetenskapliga programmet, om potenser? Hur förändras dessa kunskaper mellan årskurserna?”

Klass NV1 hade ett högt medelvärde $M = 7,09$ eftersom maxpoäng för uppgifterna 1-5 var 9. Jämförs detta medelvärde med medelvärdet $M = 6,70$ för NV2, kan det konstateras att NV1 hade ett högre medel. Ur graf 5 (sidan 24) kan man se att elever i NV2 har lägre resultat än i NV1. Detta leder till en större standardavvikelse i NV2, än de i NV1

Ur tabellerna nr 3 och 4, ses att standardavvikelse är 0,77 större i NV2 än i NV1, vilket väcker frågan om huruvida medelvärdet är den bästa jämförelse grunden. Jämförs medianen istället ser vi att NV2:s median är större. Det är egentligen ett mer trovärdigt resultat då en progressiv kunskap om potenser vore mer rimligt.

För jämförelsen mellan NV2 och NV3 kan ur tabellerna nr 4 och 5, ses att NV3 har ett högre medel $M = 7,95$ än NV2 vars medelvärde var 6,70, det kan också notera att NV3:s medel är också högre än det i NV 1. Jämförs medianerna får man följande rangordning med den största först: NV3 följt av NV2 och sist NV1.

Som svar på första problemformuleringen kan konstateras att de undersökta NV-klasserna har goda kunskaper om potenser. Både NV1 och NV3 har höga medelvärden, NV2 har det lägsta medelvärdet, vilket beror på låga resultat från några av eleverna i denna klass.

Undersökningen visar att kunskaperna om potenser ökar med årskursen vilket är ett trevligt konstaterande.

Om kunskaper som klasserna besitter verkligen motsvara kursplanens mål i de olika kurserna är svårt att avgöra, eftersom det är den enskilda lärarens tolkning av dessa mål som avgör var tyngdpunkten kommer att läggas i undervisningen.

Angående förändringar i kunskaper om potenser förändras mellan årskurserna kan inga generella slutsatser dras. För att ta reda på om skillnaderna i kunskap, mellan årskurserna, är statistiskt signifikant. Det vill säga att skillnaderna skulle vara bestående vid upprepade försök, kan ett statistiskt program SPSS användas.

Fler undersökningar med större antal elever i varje årskurs, där elevens individuella resultat inte i lika hög grad påverkar standardavvikelsen, skulle behöva genomföras. Om de undersökta variablerna (årskurs och kunskap om potenser) operationaliseras på ett bra sätt, kan förhoppningsvis en generell slutsats dras.

Den andra problemformuleringen var:

” Vilken kunskap har eleverna om logaritmer och exponentialfunktioner, i årskurs 2 och 3. Hur förändras denna kunskap mellan årskurserna?”

En närmare granskning av graf 6, visar att eleverna i NV3 överlag har presterat bättre i dessa uppgifter än eleverna i NV2. En jämförelse mellan tabell 4 och 5 visar att NV3 har ett högre medelvärde ($M = 5,5$) än NV2 ($M = 3,79$) samt att medianen också är högre.

Som svar på andra problemformuleringen kan det konstateras att NV3-klassen hade bättre kunskaper om logaritmer och exponentialfunktioner än NV2-klassen. Återigen kan inga generella slutsatser dras om dessa skillnader är bestående mellan NV klasser i årskurs 2 och 3.

Om man skulle försöka dra generella slutsatser skulle man till exempel kunna använda sig av en ”Mann-Whitney U test”, eftersom variabeln årskurs är av nominal skala och kunskap har en qvot skala. ”Mann-Whitney U test” är ett statistiskt verktyg som kan användas för att fastställa huruvida spridningen av resultat inom gruppen är sådant att generella slutsatser kan dras. Resultaten i de undersökta grupperna är inte normalfördelade, vilket också styrker att ett ”non-parametric test” skulle kunna användas. (ref. Statistics for psychology, Aron A, 1999)

Den tredje problemformuleringen var:

”Vilka är de vanligaste felen som görs vid beräkning med potenser?”

I tabell 6 redovisas de vanligaste felen som eleverna i de undersökta NV-klasserna har gjort. Som nämns i metod delen fanns endast svar från eleverna att undersöka. Därav kan endast antaganden göras om de troliga orsakerna bakom felen.

Följande slutsatser kan dras utifrån undersökningen. En vanlig orsak till fel är elevers ovan att se tal skrivna i olika former (t. ex. $6^2 = 36$). Exempel på detta kan se i uppgifterna 1a och 3a i tabell 6. Eleverna har troligen inte insett kopplingen mellan en potens skriven i faktorform och i potensform:

$$a \cdot a \cdot a \dots = a^n .$$

En annan förklaring kan vara att eleverna inte förstått följande potenslag: $(a^x)^y = a^{xy}$. Ytterligare en vanlig orsak till fel, är att baserna multipliceras eller divideras vid användning av potenslagarna. Exempel på detta kan ses i uppgifterna 1b, 2a och 2b. Eleverna kan också ha saknat kunskap om, eller missförstått, potenslagarna. Exempel på detta kan ses i ”Typ av fel 2”, i uppgifterna 1a, 1b, 2a, 2b och 4a i tabell 6.

Det går inte att utesluta att vissa elever kan ha tänkt rätt men skrivit fel, eller att eleverna helt enkelt har gissat. Ytterligare orsaker till fel skulle kunna försöka fastställas, men på grund av det tidigare nämnd brist på underlag, skulle dessa orsaker bli allt för spekulativa och kommer därför att utebli.

Det vore dock intressant att fördjupa sig i orsakerna till felräkningar med potenser samt att hitta undervisningssätt som förebygger dessa. Ett nytt diagnostiskt test skulle kunna konstrueras som verktyg för detta ändamål. I det testet borde det finnas flera uppgifter, i olika utformningar, som testar samma typ av kunskap (till exempel användning av en viss potenslag). Förhoppningsvis skulle den nya utformningen av ett diagnostiska test resultera i att slarvfel och gissningar lättare upptäcks.

Läroboksserien ”Delta” lär ut potenser på ett intressant och bra sätt enligt min åsikt, men en undersökning av hur olika upplägg av potensavsnittet påverkar kunskaperna om potenser vore intressant att genomföra.

Slutligen kan konstateras att kunskaper om potenser, logaritmer och exponentialfunktioner verkar öka progressivt med årskurserna samt att det finns en logisk uppbyggnad bakom de fel som görs av gymnasieelever. Dessa fel kan förhoppningsvis kartläggas och förebyggas. Andra faktorer som kan ha påverkat elevernas allmänna kunskap i matematik är lärare, undervisningsmiljö, motivation, och erhållna matematikkunskaper från högstadiet. Hur dessa faktorer kan undersökas samt deras samband bör granskas närmre.

Enligt min åsikt är det framförallt viktigt för varje enskild lärare i matematik att bilda hypoteser om orsaker till elevers missuppfattning, samt att successivt testa dessa hypoteser. Läraren borde också genom metakognition, tänkande om hur man tänker, öka sin förståelse för elevernas, och sitt eget, lärande.

Denna uppsats har väckt lika många frågor som den har besvarat. Men det är lika viktigt att ställa rätt sort frågor som att hitta svar. Hade inte människan ställt sig frågan ”Kan man åka till månen”, då hade inte heller någon brytt sig om att försöka.

9. Källförteckning

Aron A, *Statistics for psykology*, 1999, Prentice-Hall inc.

Björup K. m.fl, *Delta, Matematik för gymnasiet kurs A+B*, 1994, Björup K. m.fl. och CWK Gleerups Utbildningscentrum AB.

Björup K. m.fl., *Delta, Matematik för gymnasiet kurs C+D*, 1995, Björup K. m.fl. och CWK Gleerups Utbildningscentrum AB.

Björup K. m.fl., *Delta, Matematik för gymnasiet kurs E*, 1996, Björup K. m.fl. och CWK Gleerups Utbildningscentrum AB.

Hellström L., Morander S., Tengstrand A., *EnvariabelAnalys.*, 1991, Studentlitteratur.

Katz V., *A history of mathematics, An introduction*, 1993, HarperCollins College Publisher.

Kellogg R., *Cognitive Psychology*, 1995, SAGE publication inc.

Swetz F., *From five fingers to infinity, A journey through the history of mathematics*, 1994, Open Court Publishing Company.

Ifrah G., *The universal history of numbers, From prehistory to the invention of the computer*, 1998, The Harvill Press.

Swetz F. m. fl., *Learn from the masters*, 1995, The mathematical association of America.

Internet:

<http://members.aol.com/jeff570/constants.html>

<http://members.aol.com/jeff570/functions.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html>

<http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Napier.html>

10. Bilagor

10.1 Bilaga A: Diagnostiskt test, årskurs 1.

Tid: 35 min, tillåtna hjälpmedel: miniräknare och formelsamling.

Förenkla så långt det går.

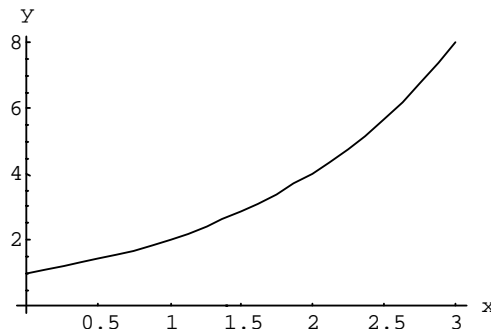
1. a) $5^x 5^x 5^x$ b) $2^{2x} 2^{4x}$

2. a) $\frac{6^{4x}}{6^x}$ b) $\frac{3^x}{3^{5x}}$

3. a) $(2^x)^4$ b) $(3^x)^y$

4. a) $\frac{a^x a^{3x}}{a^{2x}}$ b) $\frac{a^{5x} b^{2x}}{a^{2x} a^{2x} b^{2x}}$

5.



Vilket av följande samband (funktioner) visas i grafen ovan?

a) $y = 1^x$ b) $y = 2^x$ c) $y = 3^x$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. Skissa följande funktioner.

$$\text{a) } y = 3^x \quad \text{b) } y = \frac{2^{3x}}{2^{2x}}$$

10.2 Bilaga B: Diagnostiskt test, årskurs 2.

Tid: 30 min, tillåtna hjälpmedel: miniräknare och formelsamling.

Förenkla så långt det går.

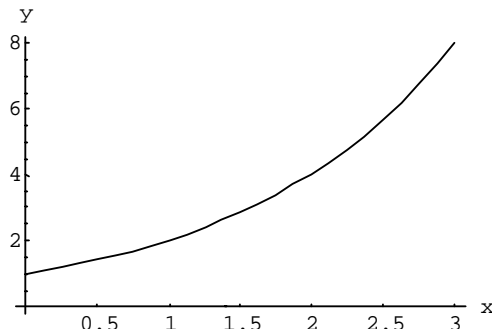
1. a) $5^x 5^x 5^x$ b) $2^{2x} 2^{4x}$

2. a) $\frac{6^{4x}}{6^x}$ b) $\frac{3^x}{3^{5x}}$

3. a) $(2^x)^4$ b) $(3^x)^y$

4. a) $\frac{a^x a^{3x}}{a^{2x}}$ b) $\frac{a^{5x} b^{2x}}{a^{2x} a^{2x} b^{2x}}$

5.



Vilket av följande samband (funktioner) visas i grafen ovan?

a) $y = 1^x$ b) $y = 2^x$ c) $y = 3^x$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. Lös följande ekvationer.

a) $9 = 3^x$ b) $9 = \frac{9^{3x}}{9^{((1/2)x)}}$

7) Logaritmfunktioner är viktiga funktioner.

a) Vad är $\lg 1000$, $\lg 100$ och $\lg 1$

b) Skissa funktionen: $y(x) = \lg x$

8. a) Skissa funktionerna:

$$f(x)=10^x \text{ och } g(x) = \lg x .$$

b) Finns det någon samband mellan dessa?

c) Om ja, vilket är sambandet.

10.3 Bilaga C: Diagnostiskt test, årskurs 3.

Tid: 35 min, tillåtna hjälpmedel: miniräknare och formelsamling.

Förenkla så långt det går.

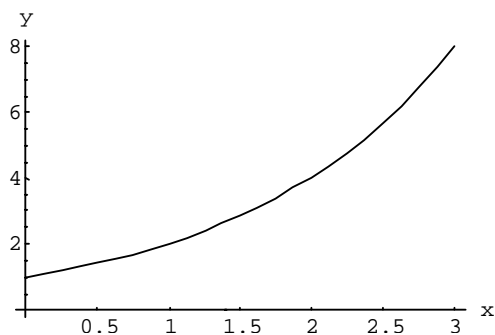
1. a) $5^x 5^x 5^x$ b) $2^{2x} 2^{4x}$

2. a) $\frac{6^{4x}}{6^x}$ b) $\frac{3^x}{3^{5x}}$

3. a) $(2^x)^4$ b) $(3^x)^y$

4. a) $\frac{a^x a^{3x}}{a^{2x}}$ b) $\frac{a^{5x} b^{2x}}{a^{2x} a^{2x} b^{2x}}$

5.



Vilket av följande samband (funktioner) visas i grafen ovan?

a) $y = 1^x$ b) $y = 2^x$ c) $y = 3^x$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. Lös följande ekvationer.

$$\text{a) } 9 = 3^x \quad \text{b) } 9 = \frac{9^{3x}}{9^{((1/2)x)}}$$

7. Logaritmfunktioner är viktiga funktioner.

a) Vad är $\lg 1000$, $\lg 100$ och $\lg 1$

b) Skissa funktionen: $y(x) = \lg x$

8. a) Skissa funktionerna:

$$f(x) = 10^x \quad \text{och} \quad g(x) = \lg x .$$

b) Finns det någon samband mellan dessa?

c) Om ja, vilket är sambandet.

9. Lös ekvationen:

$$e^x = b .$$

10. En elev hade följande lösning på ekvationen $7 \lg x + 1 = \lg x^6$:

$$7 \lg x + 1 = \lg x^6$$

$$\Leftrightarrow \lg x^7 - \lg x^6 = -1$$

$$\Leftrightarrow \lg \frac{x^7}{x^6} = -1$$

$$\Leftrightarrow \lg x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Förklara vilka samband han eller hon har använt sig av.

10.4 Bilaga D: Svarsblankett, årskurs 1.

Namn:

Skriv svaren till uppgifterna på detta svarsblankett.

1a)

1b)

2a)

2b)

3a)

3b)

4a)

4b)

5)

6a)

6b)

10.5 Bilaga E: Resultat av diagnostisk test för NV1.

Elev nummer.	Resultat till uppgifterna 1-5.	Totala resultat
1	3	4
2	6	6
3	7	7
4	7	8
5	9	10
6	4	6
7	9	10
8	9	10
9	3	4
10	5	6
11	7	8
12	7	9
13	7	8
14	7	7
15	9	9
16	8	9
17	9	10
18	8	8
19	5	6
20	9	10
21	9	11
22	9	11

10.6 Bilaga F: Resultat av diagnostisk test för NV2.

Elev nummer.	Resultat till uppgifterna 1-5.	Resultat till uppgifterna 6-8	Totala resultat
1	9	7	16
2	9	5	14
3	9	7	16
4	8	5	13
5	9	7	16
6	9	3	12
7	9	3	12
8	4	3	7
9	9	3	12
10	5	2	7
11	1	1	2
12	2	1	3
13	8	5	13
14	1	2	3
15	5	3	8
16	3	3	6
17	8	6	14
18	6	2	8
19	8	4	12
20	7	2	9
21	9	4	13
22	7	4	11
23	9	4	13

10.7 Bilaga G: Resultat av diagnostisk test för NV3.

Elev nummer.	Resultat till uppgifterna 1-5.	Resultat till uppgifterna 6-8	Totala resultat
1	9	5	16
2	7	6	14
3	9	7	19
4	9	6	17
5	9	7	19
6	8	3	15
7	7	7	16
8	3	5	8
9	5	4	10
10	9	7	18
11	8	7	16
12	9	7	17
13	8	6	16
14	8	7	16
15	9	3	13
16	9	4	14
17	9	5	15
18	7	2	10
19	9	7	17



Växjö
universitet

Matematiska och systemtekniska institutionen

SE-351 95 Växjö

tel 0470-70 80 00, fax 0470-840 04

www.msi.vxu.se