School of Mathematics and Systems Engineering

Reports from MSI - Rapporter från MSI

Begreppskartors tillämpning inom geometri

Författare:
Mikael Cehola
Marcus Martinsson

Juni
2001

MSI
Växjö University
SE-351 95 VÄXJÖ

Report 01048
ISSN 1650-2647
ISRN VXU/MSI/MA/E/--01048/--SE

Innehållsförteckning

1 Inledning

Vår uppsats är ett kandidatarbete inom ramen för det matematikdidaktiska området. Uppsatsen tillhör studier på C-nivå och ligger under Matematiska och Systemtekniska Institutionen (MSI), vid Universitetet i Växjö.

Inom det didaktiska forskningsområdet har det under senare år växt fram en disciplin som innebär att man försöker skapa en slags modell för den ideala uppfattningen om hur alla begrepp, inom ett speciellt område, är relaterade till varandra. Denna modell brukar benämnas begreppskarta eller begreppsligt fält.

Vergnaud skriver: *”Det är sällan meningsfullt att studera utvecklingen av ett enskilt begrepp hos en elevgrupp. Elevernas föreställningar utvecklas över en lång period och är knutna till en mängd olika situationer och problem, både i och utanför skolan.”* [1]

I regel fås en bättre helhetsbild om man istället väljer att studera en mängd olika, lämpligt utvalda, begrepp vid sidan av varandra och samtidigt iaktta hur eleverna kan relatera dessa inbördes. Vergnaud definierar begreppskarta som en mängd av situationer, vars förståelse bygger på att man behärskar ett antal sinsemellan relaterade begrepp.

Vi har valt att arbeta med begreppskartor, dels för att vi anser det vara ett intressant område, dels för att vi är övertygade om att vi kommer att ha stor nytta av detta i vårt framtida läraryrke.

[1] Engström, Arne, sid. 81.

2 Syfte

Vår uppsats är främst ämnad som en studie av gymnasieelevers begreppsuppfattning i klassisk geometri. Som en följd av detta har vi konstruerat ett test utifrån de begreppskartor vi gjort över gymnasieskolans kursplan för geometri. Målet med testet är inte att kunna dra några långtgående slutsatser, utan att belysa ett intressant didaktiskt hjälpmedel.

Vi hoppas kunna ge en tydlig inblick i en begreppskartas struktur och hur man kan gå till väga för att konstruera en sådan. Redan nu vill vi peka på att begreppskartor är något som kan användas i de flesta situationer. Med vårt exempel från matematiken vill vi endast belysa en sådan situation.

För att belysa vad en begreppskarta är, hur den kan användas och vad man vinner på att använda sig av en sådan, har vi valt att arbeta inom det geometriska området. Vår avsikt är att studera geometriska begrepp och söka klarhet i hur dessa är relaterade inbördes. Att vi valt att inrikta oss på geometri beror främst på att vi har ett allmänt intresse för området, men också för att vi anser att belysningen av en begreppskartas uppbyggnad då blir tydlig och lätt att förstå. Våra förhoppningar är att uppsatsen ska ge upphov till nyfikenhet och inspiration för läsaren.

Våra frågeställningar är:

Vad är en begreppskarta och hur är en sådan uppbyggd?

Har gymnasieelever bra kunskaper i geometri?

Vilka kunskapsskillnader i geometri finns mellan pojkar och flickor?

Har elever på teoretiska program större kunskaper i geometri än elever på yrkesförberedande program?

Kan begreppskartor vara ett hjälpmedel för lärare i undervisningen?

Kan man genom att använda begreppskartor öka begreppskunskapen och/eller underlätta inlärningen?

3 Begreppskartor

3.1 Begreppskartors struktur härstammande från Euklides *Elementa*?

Euklides *Elementa* är en av de mest välkända skrifterna i världen. I västerlandet brukar den räknas som den, näst efter Bibeln, mest spridda boken. *Elementa* har legat till grund vid utformningen av innehållet i skolans kursplaner i geometri fram till 1950-talet, då geometrins ställning i den svenska skolan försvagades radikalt.

Euklides verk omfattar 13 böcker och behandlar fyra övergripande områden. Dessa är plangeometri, aritmetik, ojämförbara storheter och rymdgeometri. *Elementa* innehåller ett axiomatisktdeduktivt system och tar sin början i givna definitioner och grundsatser. Exempel på givna definitioner är *”En punkt är något som inte kan delas”*, *”En linje är en längd utan bredd”* och *”En linjes ändar är punkter”*. Sammanlagt finns det 23 givna definitioner.

Grundsatserna är tio till antalet och delas in i fem postulat och fem allmänna grundsatser. Postulaten hänför sig speciellt till den teori som ska skapas. Exempel på postulat är *”Det är möjligt att dra en sträcka från en punkt till en annan”*, *”Alla räta vinklar är lika med varandra”* och *”En sträcka kan förlängas godtyckligt till en längre sträcka”*. De grundsatser som benämns allmänna är sådana till karaktären att de är giltiga för all vetenskaplig verksamhet. Exempel på allmänna grundsatser är *”Ting, som är lika med ett och samma, är också lika med varandra”, ”Om lika adderas till lika, är det hela lika” och ”Om lika subtraheras från lika, är differensen lika”.*

Ur dessa givna definitioner och grundsatser kan man utläsa att det, inom klassisk geometri, finns fem fundamentala begrepp. Dessa är punkt, rät linje, yta, plan och vinkel.

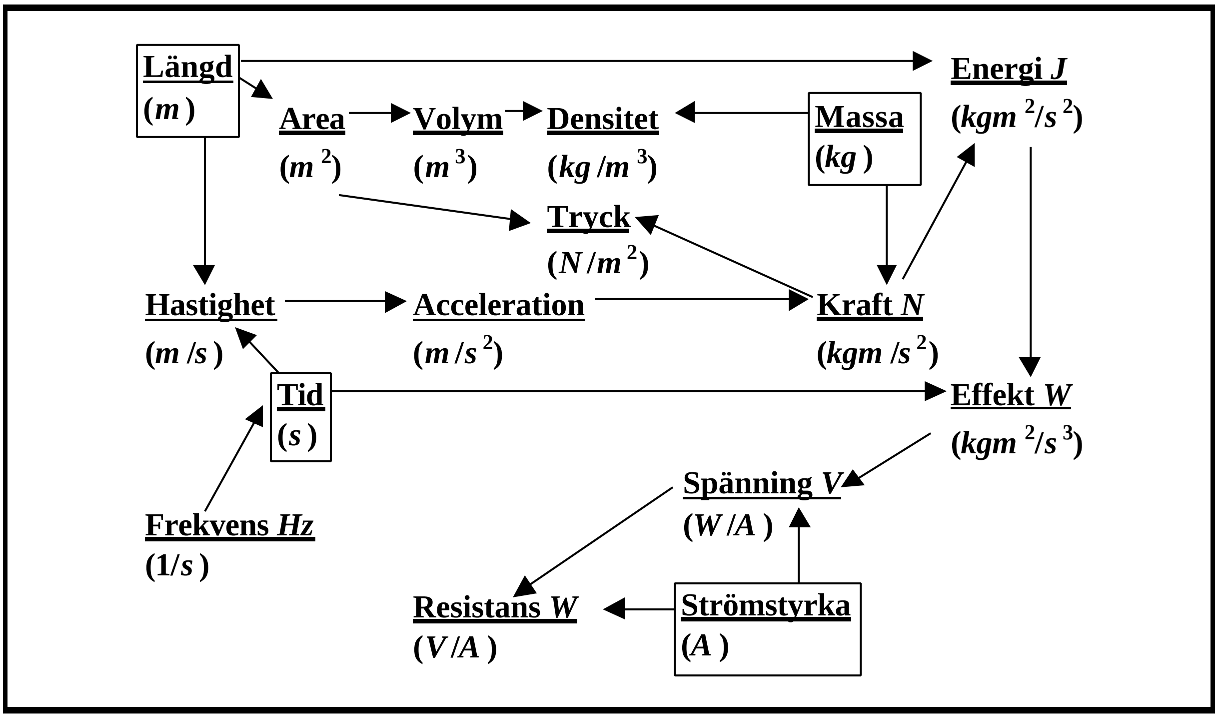
Vi menar att begreppskartors struktur i grunden har stora likheter med den struktur som finns i *Elementa.* Euklides börjar med att definiera några grundläggande axiom, som allt sedan bygger på. I en begreppskarta tar man sin utgångspunkt i ett begrepp för att sedan definiera andra begrepp utifrån detta och m.h.a. de mellanliggande relationerna som förekommer.

Euklides försöker att skapa en heltäckande struktur för matematiken, där givna definitioner och grundsatser är de enda argument på vilka genomförda resonemang får stödja sig. Han lyckas dock inte nå ända fram i detta avseende, men under de senaste decennierna har bristerna täckts och numera finns det en fullbordad euklidisk geometri utvecklad. Begreppskartor kan på liknande sätt vara heltäckande inom ett område, men behöver inte vara det. Våra begreppskartor har exempelvis syftet att täcka de geometriska begrepp som tas upp i gymnasieskolans A- och B-kurs.

3.2 Inledande exempel

Vi inleder med några exempel för att förklara hur strukturen hos en begreppskarta är uppbyggd.

Exempel 1: Vi utgår från en färdig begreppskarta som behandlar några av grundenheterna i SI-systemet[2]. Genom att väva in längd, massa, tid och strömstyrka, vilka alla är grundstorheter, i ett inbördes relaterat begreppsligt fält, underlättas förståelsen av de enskilda storheterna. Detta leder samtidigt till den positiva effekten att de begrepp som används för att knyta samman de nämnda grundstorheterna med exempelvis storheterna densitet, kraft, acceleration och spänning, också blir belysta.



Om det till ett begrepp, exempelvis area, leder en pil alternativt flera pilar som enbart utgår från en grundstorhet, i detta fallet längd, betyder det att begreppet area endast beror av begreppet längd. Ett annat sätt att konstatera samma faktum är genom att studera begreppets enhet. Area har enheten m^2, således är area enbart beroende av storheten med enheten meter, d.v.s. längd.

Nu ska vi se hur detta fenomen uppträder i praktiken. Om man utgår från en längd och vill beräkna arean, hos exempelvis en rektangel, multipliceras ena sidan med en närliggande sida. Båda sidorna har enheten meter, följaktligen blir enheten för rektangelns area $m \cdot m = m^2$.

Även till volym leder det endast pilar som har sitt ursprung i längd, alltså är också volym enbart beroende av en grundstorhet. Volymens enhet är också mycket riktigt m^3.

[2] Den ursprungliga begreppskartan finns i Bonniers multimedialexikon 1998, sök på SI-systemet.

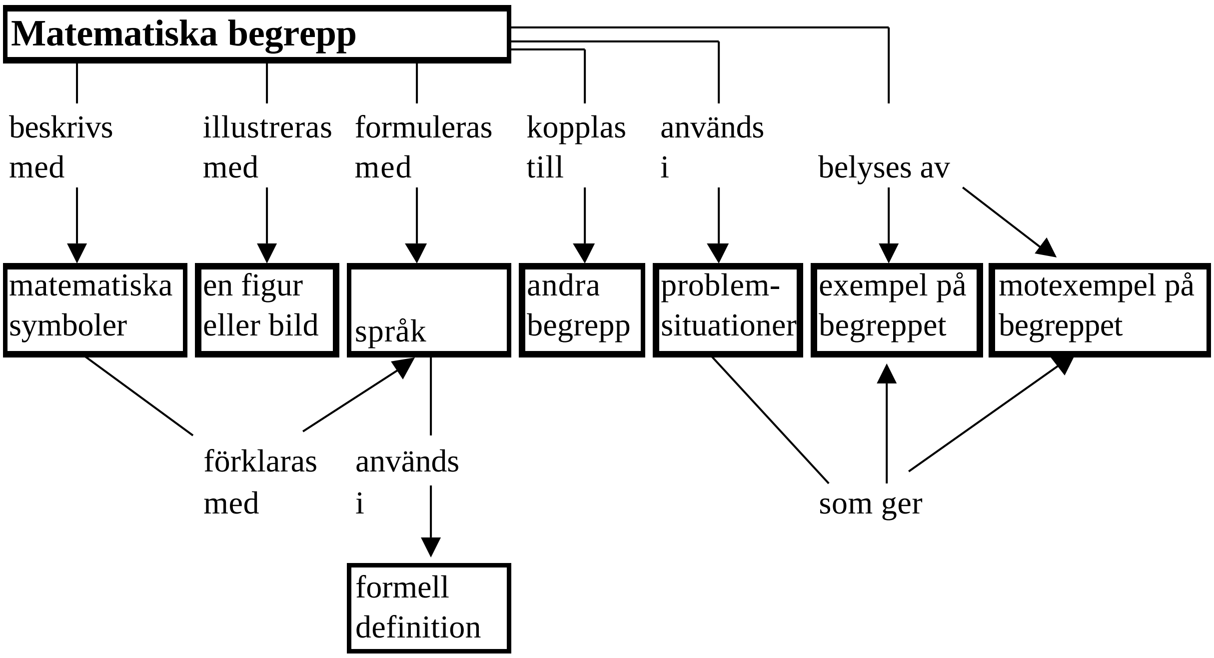
På liknande sätt som i det föregående fallet, vilket behandlade arean av en rektangel, vill vi nu istället beräkna volymen av ett rätblock, som är rektangelns motsvarighet i det tredimensionella fallet. Vi utgår från en rektangel, vars area är baserad på multiplikationen mellan längd och bredd, och multiplicerar denna med rätblockets tredje riktning, vilken kallas höjd. Då erhålls volym som, i enlighet med tidigare resonemang, får enheten $m \cdot m^2 = m^3$.

Går man vidare i begreppskartan stöter man på begreppet densitet, till vilket vi hittar pilar som tar sin början i både längd och massa. Alltså beror densitet i något avseende på båda dessa grundstorheter. Enheten för densitet är kg/m^3, d.v.s. densitet är förhållandet mellan massa och volym för ett material eller föremål.

För att slutligen ta ett exempel på ett begrepp, vars pilar utgår från tre grundstorheter, väljs begreppet kraft. Vi ser att dess enhet är $kg \cdot m/s^2$, vilket innebär att kraft beror av massa, längd och tid. Längd och tid möts i hastighet, går via acceleration, till kraft. Hit leder också pilen från massa.

På liknande sätt, med pilar som har sitt ursprung i en eller flera grundstorheter, är sedan varje steg i begreppskartan uppbyggt. Att det inte finns någon pil dragen från exempelvis tid till area beror givetvis på att area är oberoende av tid.

Exempel 2: Vi har sett ett exempel på en begreppskarta från fysiken. Nu följer ett exempel som är hämtat från matematiken, vilket behandlar matematiska begrepp[3]. Denna begreppskarta åskådliggör hur matematiska begrepp allmänt beskrivs i matematiken. Många tycker kanske att denna begreppskarta är mera lättöverskådlig eftersom varje pil förklaras direkt i figuren.



[3] Grevholm, Barbro, *Vi skriver $y = x + 5$. Vad betyder det?*, sid. 12.

3.3 Ursprung

En begreppskarta kan appliceras på nästan alla områden och dess utseende kan varieras. Det finns dock alltid någon slags struktur bakom en begreppskarta, men man kan inte säga att konstruktören ska följa några speciella regler. Varje begreppskarta blir på detta sätt unik och utformningen blir efter konstruktörens tycke, smak och behov. Det viktiga är att den fyller sin funktion. Begreppskartan kan liknas vid en slags mindmap, vilken är en typ av karta, där man strukturerar upp ett visst innehåll för att snabbt få en överblick av ett område. Detta blir till ett slags stöd för minnet.

Verktyget begreppskarta har bl. a. utvecklats av den amerikanske forskaren Joseph D. Novak, som anses ha lett utvecklingen. År 1974 började han att använda ett utkast till sin bok, *A Theory of Education*, som ett undervisningsmaterial i sina klasser. Eleverna tyckte att boken var intressant, inte enbart p.g.a. dess innehåll, utan framförallt för att den hjälpte dem ”learn how to learn”. Efter att ha hört detta från elever under flera terminers tid, tyckte han att det var dags att utforma en instruktion i ”learn how to learn”. Som en följd av detta kan man säga att begreppskartan var etablerad.

Vid sidan av Novak har även andra forskare lagt fram teorier i ämnet. En ny forskningsdisciplin har vuxit fram och många undersökningar har gjorts. Vi vill här lyfta fram några forskare som vi anser vara av särskilt stort intresse.

Professor Bogden har gjort en intressant studie. Han undervisade genetikstuderande i tekniken att använda begreppskartor. Inför varje lektion konstruerades begreppskartor till eleverna som var utformade efter vad lektionen skulle handla om. Begreppskartorna använde professorn sedan för att diskutera ämnet med eleverna. Bogdens studie ska dock inte ses som vetenskaplig, utan snarare av experimentell karaktär. Reaktionerna från eleverna var blandade. Ungefär hälften var positiva, medan resten var neutrala eller negativt inställda till användandet av begreppskartor. Några slutsatser som växte fram ur hans arbete var:

- Begreppskartor bör vara enkla.
- Linjer/pilar mellan olika begrepp bör namnges.
- Elever har mest nytta av att konstruera sina egna begreppskartor.

En annan forskare, Gurley, har gjort en studie av vad elever tycker om begreppskartor. Denna studie grundar sig på intervjuer. Av dessa kan man sammanställa en del viktiga slutsatser. Följande är representativa kommentarer från elever angående begreppskartors användbarhet:[4]

- *”Concept maps help. I don`t like doing them, but they help. I guess I get more out of the reading. When you`re doing the concept maps you aren`t thinking about what it really means, you`re thinking if it makes sense or not.”*

- *”I study from my maps more than book or tapes or class notes. It brings out all the stuff, not just the little words. You see what`s in common to the consepts by how they connect. It`s easier for me now – I get it down in minutes `cause I`ve gotten good at looking out for the main things.”*

[4] Novak, Joseph, sid. 204.

- *"I always use my maps. If you just read the book it`s different `cause you might not see the main point of the chapter and how it all fits together. Concept maps are easier to understand. It puts it a different way than the book says it. It gives you the concepts in your own way. They`re worth the time – it`s easier to learn, for me."*

- *"I can`t use concept maps. I`d rather read the chapter over and over. Concept maps are more work. It`s different than memorizing – it`s all related."*

Av intervjuerna kan utläsas att det inte alls är självklart att begreppskartor ska användas i undervisningssyfte. En del elever trivs alldeles utmärkt med att använda begreppskartor, medan andra inte kan ta till sig dess eventuella fördelar.

Vollrath[5] är en annan professor som forskat i ämnet och han menar att förståelse är ett nyckelord när det gäller didaktiska begreppsdiskussioner. Det räcker inte att kunna definitioner, sådana kan man lära sig utantill. Han menar att förståelse bygger på att man kan ge exempel, ge motexempel, testa exempel, känner till egenskaper om begrepp och samband mellan begrepp. Den som lär genomgår olika stadier av förståelse och man kan inte säga att det finns en slutlig förståelse.

Vad kan man göra för att få elever att börja använda begreppskartor och på sikt få dem att, genom det, lättare lära sig? Underlättar överhuvudtaget begreppskartor inlärningen? Hur använder man begreppskartor i undervisning?

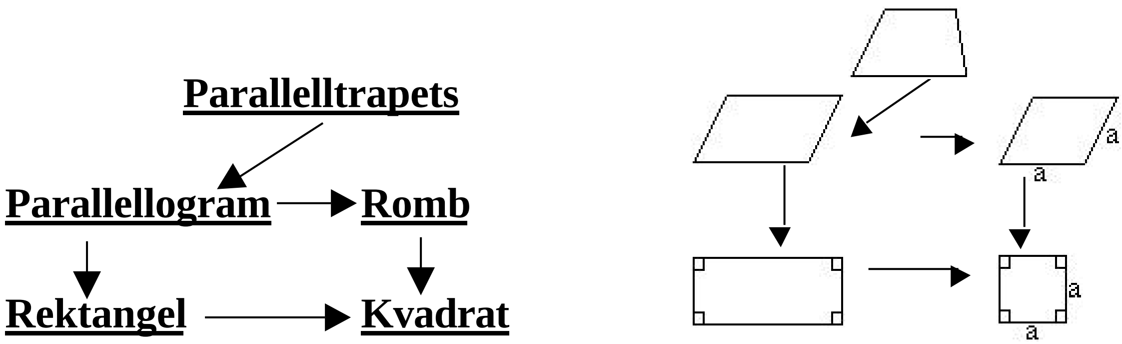
Den sista frågan diskuteras i kapitlet som behandlar begreppskartor i undervisning.

[5] Grevholm, Barbro, *Vi skriver $y = x + 5$. Vad betyder det?*, sid. 12.

3.4 Belysning med hjälp av geometri

Våra begreppskartor täcker det som tas upp, inom klassisk geometri, i gymnasieskolans A- och B-kurs. Begreppskartorna ligger i sin helhet som en bilaga[6]. Vi har alltså valt det geometriska området för att belysa kartornas styrka och detta kapitel ska ses som en redogörelse för hur vi tycker att begreppskartor kan konstrueras. I likhet med våra inledande exempel, kan mängder av frågor besvaras genom att endast ta en snabb titt på kartorna. Hur är olika geometriska begrepp kopplade till varandra? Vad har plangeometri gemensamt med rymdgeometri? Är kvadraten en rektangel?… .

För att tydliggöra våra begreppskartors uppbyggnad och strukturella egenskaper har vi valt att inledningsvis analysera delen som behandlar fyrhörningar. Vi hoppas att detta exempel ska vara talande för hela begreppskartan och en hjälp för läsaren att följa med i resonemanget.



Till vänster finns namnen på de olika förekommande fyrhörningarna och till höger finns tillhörande geometriska figurer. Alla figurerna ska ses som parallelltrapetser, vilket också blir tydligt om man följer pilarna. Parallelltrapetsen är den fyrhörning som det ställs minst krav på, det enda är att två av fyrhörningens sidor ska vara parallella. Följer man pilarna i figuren ser man att kraven ökar, enligt definitionsschemat nedan. För att fyrhörningen exempelvis ska vara en parallellogram krävs att sidorna är parvis parallella och för att den ska vara en rektangel krävs parvis parallella sidor samt räta vinklar. Kontentan av resonemanget blir att en parallellogram kan ses som en parallelltrapets. På liknande sätt kan exempelvis rektangeln ses som en parallellogram eller parallelltrapets. Dessa samband blir också tydliga om man följer pilarna i figuren.

Definitioner:[7]

Parallelltrapets*:** En ***parallelltrapets är en fyrhörning med två parallella sidor.

Parallellogram*:** En ***parallellogram är en fyrhörning med parvis parallella sidor.

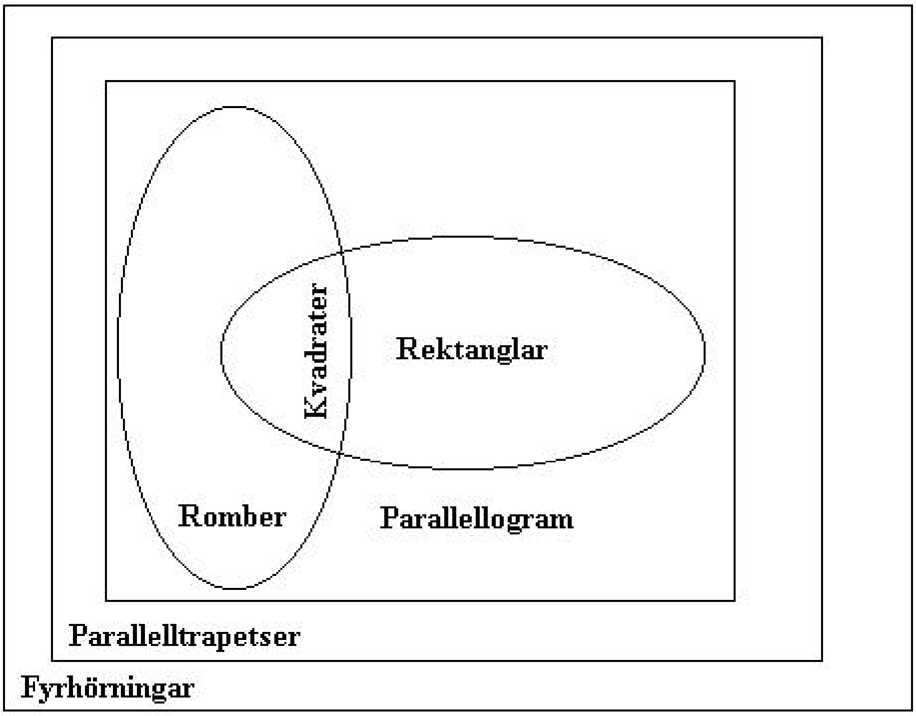
Romb*:** En ***romb är en fyrhörning där alla sidor är lika långa.

Rektangel*:** En ***rektangel är en fyrhörning där vinklarna är räta.

Kvadrat*:** En ***kvadrat är en fyrhörning där vinklarna är räta och sidorna lika långa.

[6] Se sidan 75.
[7] Skolöverstyrelsen, sid. 46.

För att tydliggöra resonemanget på föregående sida och förklara de inbördes relationerna ur en annan synvinkel kan man ta hjälp av ett s.k. Venndiagram.



Det yttersta området symboliserar alla möjliga fyrhörningar. De fyrhörningar som har två sidor parallella finns innanför det näst yttersta området och kallas parallelltrapetser. Om man tar ytterligare ett kliv inåt i Venndiagrammet når man området som består av parallellogram, vilka alltså även är parallelltrapetser och fyrhörningar. Längre in i figuren hittas rektanglar, romber och kvadrater. Vad gäller rektanglar och romber så kan man konstruera en rektangel, som inte är en romb och en romb som inte är en rektangel. Enda gången en fyrhörning kan sägas vara både rektangel och romb är i fallet av en kvadrat.

3.5 Att använda begreppskartor i undervisning

Vi vill börja med att knyta an till professor Bogdens undervisning som diskuterades tidigare. Bogden konstruerade alltså en begreppskarta inför varje lektion som var utformad efter lektionens innehåll. Begreppskartan fanns alltid till hands och användes vid diskussioner kring lektionens innehåll. Begreppskartan utgjorde ett stöd för eleverna som lätt kunde följa med i diskussionen och se hur det som diskuterades passade in i det större sammanhanget. Begreppskartan var också ett stöd för Bogden som lättare fick en röd tråd att hålla sig till, samtidigt som den blev ett stöd för hans minne. Vidare hjälpte begreppskartan professorn att organisera och förbereda sina lektioner, samt att utarbeta svarsmallar till test som han gav ut till eleverna.

Som vi tidigare varit inne på kanske inte begreppskartor för något bra med sig till alla som kommer i kontakt med sådana. Det vore dock önskvärt att alla lärare kände till vad en begreppskarta är och vad man eventuellt kan vinna på att använda sig av sådana. Sedan är det upp till var och en att använda dessa eller inte. Att använda begreppskartor ska ses som en av många undervisningsmetoder och som ett didaktiskt hjälpmedel.

Att få ner allt viktigt och hur detta förhåller sig inbördes, på ett papper, anser vi vara mer effektivt än att behöva leta i flera ostrukturerade pappersbuntar. Således borde vi som blivande lärare få det lättare och mer strukturerat om vi kunde lägga fram en karta som visar vad eleverna bör kunna.

Vi menar att begreppskartor lämpar sig särskilt väl inom matematiken, eftersom alla begrepp där utgör en del av den större helheten. Ett steg inom matematiken bygger oftast på ett föregående och är samtidigt en plattform för ett nytt. Inom andra ämnen är begreppskartor visserligen också användbara, men matematiken är ett exempel på ett ämne som samlar allt i ett system. Inom historia, exempelvis, finns det visserligen en slags kronologisk struktur, men de flesta händelser ger trots allt sitt eget lilla bidrag till den historiska scenen. Det är svårt att få samma helhetskänsla som inom matematiken.

Om matematikklassen, exempelvis, ska arbeta med den plana geometrin anser vi det vara lämpligt att läraren inleder med att dela ut en begreppskarta över alla begrepp som ska behandlas. Sedan kan eleverna använda denna för att få en uppfattning om begrepps relationer till varandra och som ett stöd för minnet. Ett annat alternativ kan vara att eleverna får en lista över vilka begrepp som ska genomgås och utifrån den konstruera sin egen begreppskarta. Läraren kan eventuellt sedan rätta till strukturella fel och missuppfattningar. Ytterligare ett förslag kan vara att eleverna får konstruera begreppskartan då delkursen om den plana geometrin redan är behandlad och på så sätt åstadkomma en slags sammanfattning.

Vi vill avrunda kapitlet med att säga att vi har den fasta övertygelsen att det blir lättare för eleverna att lära in och för läraren att undervisa, ju mera strukturerat någonting är.

4 Metod

Grunden för vår uppsats utgörs av test. Vi ansåg att det var den enklaste och mest praktiskt genomförbara metoden för att studera gymnasieelevers begreppsuppfattning inom klassisk geometri. M.h.a. våra test vill vi få en grund, för att kunna diskutera och analysera våra frågeställningar.

Testen är konstruerade utifrån de begreppskartor vi gjort och så att de ska motsvara de delar inom geometrin som behandlas under A- och B-kurserna på gymnasiet. Övriga gymnasiekurser innehåller förhållandevis lite klassisk geometri. Till vår hjälp har vi tagit kursplanerna[8] för dessa kurser, samt några vanliga läroböcker, *Delta* och *Matematik 2000*.

Testen fick elever vid gymnasieskolorna i Växjö genomföra. De berörda skolorna var Kungsmadskolan, Teknikum och Katedralskolan. Vår avsikt var att testa eleverna dels på hur väl de känner till olika begrepp och dess egenskaper, dels i vilken grad de behärskar att använda dessa begrepp. Förmågan att utnyttja begreppen testas främst genom att eleverna ska utnyttja kända formler och kända samband för att lösa problemuppgifter.

När man utformar ett test är det många saker som måste beaktas. Vilka frågor man ställer och hur de formuleras är mycket viktigt för att syftet ska kunna uppnås. Frågeformuleringar ska vara enkla att förstå och får ej innehålla odefinierade begrepp. Svarsalternativen bör vara fria från subjektiva bedömningar såsom ”lagom” eller ”lite”. Ett annat vanligt misstag är att flera frågor vävs in i en t. ex: Har ni en röd eller blå bil; ja eller nej. Vid jakande svar vet man fortfarande inte vad det är för färg på bilen, bara att den är röd eller blå. Vidare bör man undvika långa frågor som kan göra att den svarande tröttas ut och slarvar. När frågorna är formulerade måste helheten bearbetas och frågorna måste placeras in i en lämplig ordning.

När man arbetar med matematik är frågor som bygger på utnyttjande av formler en vanlig frågetyp. Där söker man inte bara ett svar, utan även en redovisning av lösningen. Här gäller det sedan att finna klarhet i hur den svarande resonerat för att komma fram till sitt resultat. Ibland blir det nödvändigt att ”räkna baklänges”, d.v.s. i de fall där lösningarna är knapphändiga krävs det att man rekonstruerar den svarandes tankegång. En annan typ av frågor är begreppsfrågor. Dessa går ut på att förklara hur två eller flera begrepp förhåller sig till varandra och vad det är som gör att man kan säga att de är inbördes relaterade.

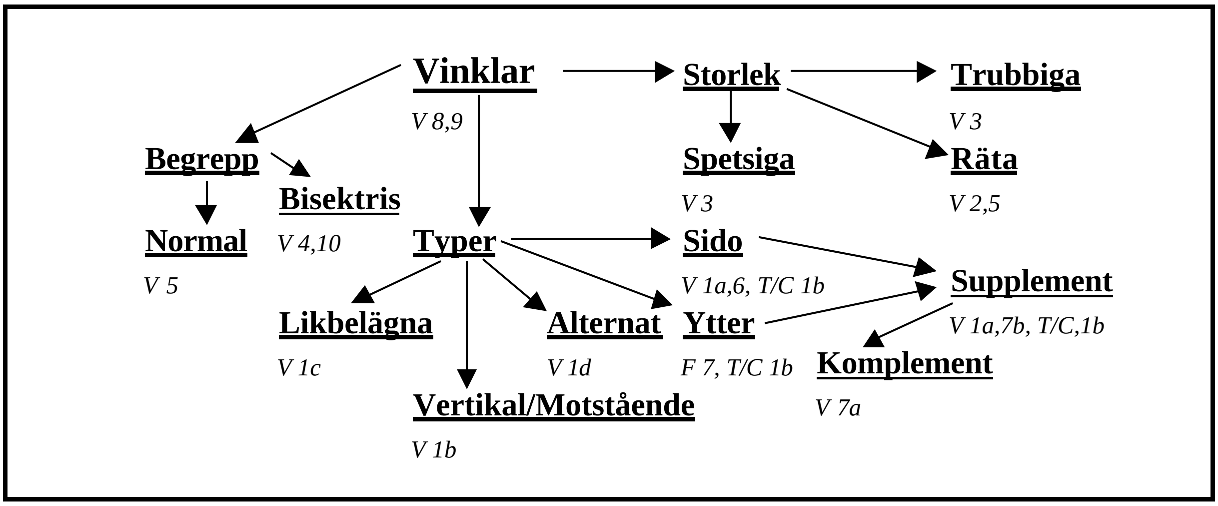
Vi har valt att dela upp de bitar vi vill undersöka inom geometrin på fyra olika test och dessutom har vi konstruerat en *allmän del.* De fyra testen behandlar *trianglar/cirklar, fyrhörningar, vinklar* och *rymdgeometri*. I den allmänna delen undersöker vi om eleverna exempelvis vet vad en definition, en matematisk sats och ett bevis är. Vi är då också intresserade av om de kan ge exempel på detta.

Varje test innehåller 10 frågor, som är uppdelade på tre delar. I första delen, som vi kallat *namnge*, är uppgiften att sätta namn på några centrala geometriska figurer. Andra delen testar *egenskaper*. Slutligen finns en del med *problemlösning*, där den svarande ska lösa uppgifter m.h.a. samband och formler som en gymnasieelev bör känna till. Under testens genomförande var det tillåtet att använda miniräknare och linjal. Testen och tillhörande svarsmallar ligger som bilagor.

[8] Se sidan 74.

Våra begreppskartor ligger till grund för utformningen av testen. Varje test bygger på en begreppskarta med samma namn. T.ex. har testet *trianglar/cirklar* sitt ursprung i begreppskartorna över trianglar och cirklar.

Vi väljer nu att lyfta fram begreppskartan över vinklar för att åskådliggöra hur vi har konstruerat frågorna till testet med samma namn.



När testen utformades försökte vi beröra begreppen som tagits med i våra begreppskartor, eftersom begreppskartorna konstruerats utifrån det som studeras i gymnasiekurserna. I begreppskartorna finns hänvisningar till testen. Exempelvis innebär *V 5* att begreppet normal behandlas i testet *vinklar*, uppgift 5.

Vi genomförde ingen förstudie i egentlig mening, utan den första versionen av testen lät vi istället familjemedlemmar och vänner, någorlunda representativa för vår målgrupp, läsa igenom. Den respons vi fick där gav upphov till några omformuleringar och att något förklarande ord lades till.

Beroende på att undersökningen tidsmässigt ligger i slutet av gymnasieskolans termin hade vissa klasser inte möjlighet att deltaga p.g.a. tidsbrist eller för att deras kurser redan avslutats. Detta gjorde att vi fick genomföra våra tester i de klasser som hade tid och möjlighet. Således bör undersökningen inte räknas som helt representativ.

5 Analys

I *resultat*, vilket ligger som en bilaga[9], har vi redovisat en kort analys till varje uppgift. Här lyfter vi fram uppgifter och generella svårigheter som vi anser kräver en mer djupgående analys. Analysen är indelad i styckena *Totalt*, *Pojkar/flickor*, *Teoretiskt/yrkesförberedande program*, *Genomgående problematik* samt *Enskilda uppgifter*.

Det totala resultatet diskuteras dels utifrån en sammanslagning av samtliga test, dels utifrån ett test i taget. För att belysa de skillnader som finns mellan de tre testdelarna; *Namnge*, *Egenskaper* och *Problemlösning*, har vi valt att analysera dem var för sig. I stycket *Pojkar/flickor* kommenteras skillnader mellan pojkars och flickors resultat. På liknande sätt behandlas skillnader mellan de teoretiska och yrkesförberedande programmens resultat i stycket *Teoretiskt/yrkesförberedande program*. I *Genomgående problematik* försöker vi åskådliggöra olika återkommande svårigheter hos eleverna. Vi avslutar analysen med stycket *Enskilda uppgifter*, där vi lyfter fram uppgifter som vi anser att eleverna behärskade bättre resp. sämre än förväntat. Även uppgifter som av en eller annan anledning anses vara särskilt intressanta diskuteras här.

När vi diskuterar en testuppgift ger vi i anslutning till denna, inom parentes, hänvisning till vilket test och vilken uppgift som avses.

5.1 Totalt

Analysen görs utifrån tabeller som redogör för resultatet av de tre testdelarna. Den första tabellen *Samtliga test* åskådliggör totalresultatet av de fyra testen. Här ges allmänna kommentarer. De följande tabellerna behandlar enskilda test. Där analyseras de tre testdelarna, var och en för sig, mera ingående.

Samtliga test	**Totalt (%)**
Samtliga uppgifter	40
Namnge	55
Egenskaper	35
Problemlösning	35

Som vi ser i tabellen är 40% av samtliga uppgifter korrekt lösta. Den del som har störst lösningsfrekvens är *namnge*, där 55% av uppgifterna har besvarats korrekt. På delarna egenskaper och problemlösning är i vardera fallet 35% korrekt besvarade.

Över lag tycker vi att resultatet utfallit sämre än vad vi hade förväntat oss. Delen *namnge* anser vi att eleverna borde klarat bättre, eftersom vi där ställde frågor om de mest vanligt förekommande geometriska begreppen. Vad gäller delarna *egenskaper* och *problemlösning* hade vi förväntat oss att också den senare delens resultat varit något bättre än vad som nu blev fallet. Resultatet för *egenskaper* var däremot ungefär vad vi hade förväntat oss. Av erfarenhet från vår egen skoltid vet vi att det ofta är svårt att förklara och definiera begrepp.

[9] Se sidan 29.

Trianglar/Cirklar

Trianglar/Cirklar	Totalt (%)
Hela testet	32
Namnge	46
Egenskaper	29
Problemlösning	17

Namnge

Blandat resultat.

Uppgifter med bra resultat: Liksidig triangel (1a), diameter (1c), cirkelsektor (1d).
Uppgifter med mindre bra resultat: Yttervinkel (1b), korda (1c).

Kommentar:
Resultatet för begreppet yttervinkel var svagt, men detta tycker vi är förståeligt eftersom yttervinkel inte tillhör de mest centrala begreppen. Att känna till begreppet korda borde gett ett bättre resultat med tanke på att vi konstruerade en figur, innehållande både diameter och korda, för att eleverna skulle se skillnaden mellan dessa.

Egenskaper

Svagt resultat.

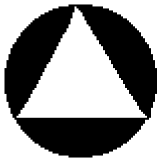
Uppgifter med bra resultat: Den likbenta triangelns egenskaper (4), cirkelbåge (7a).
Uppgifter med mindre bra resultat: Skillnad mellan spetsvinklig och trubbvinklig triangel (3), median (5b), randvinkelsatsen (8).

Kommentar:
Vi tycker att eleverna borde klarat frågan om hypotenusan (2) bättre, särskilt med tanke på att begreppet förekommer tillsammans med beräkningar då Pythagoras sats används. Att resultatet för spetsvinklig resp. trubbvinklig triangel var svagt förklaras med att 37 st. elever hade missuppfattat frågeformuleringen och i stället förklarat skillnaden mellan spetsig och trubbig vinkel. Vad gäller höjden (5a), så hade många elever missat att vinkeln vid fotpunkten skall vara rät. På liknande sätt visade resultatet att en stor grupp tog för givet att en bas i en triangel (5c) alltid är den ”nedre sidan” eller den ”horisontella sidan”.

Problemlösning

Mycket svagt resultat.

Kommentar:
I uppgiften (10) där det först gäller att beräkna arean av en cirkel och därefter subtrahera med arean av en inskriven liksidig triangel (se figur nedan), ligger den största svårigheten i att beräkna arean av triangeln, då man vet dess sida. Ett vanligt fel är att eleverna multiplicerar två sidor i den liksidiga triangeln för att sedan dividera med två.



Fyrhörningar

Fyrhörningar	Totalt (%)
Hela testet	38
Namnge	65
Egenskaper	35
Problemlösning	26

Namnge

Blandat resultat.

Uppgifter med bra resultat: Rektangel (1a).
Uppgifter med mindre bra resultat: Parallelltrapets (1b).

Kommentar:
Det svaga resultatet på parallelltrapets kan antagligen förklaras med att begreppet förväxlats med parallellogram.

Egenskaper

Blandat resultat.

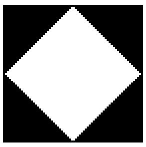
Uppgifter med bra resultat: Förklaring av varför en rektangel är en parallellogram (3), antalet diagonaler i en speciell fyrhörning som vi konstruerat (8a).
Uppgifter med mindre bra resultat: Rita en fyrhörning där en vinkel saknar yttervinkel (7), antalet diagonaler i en speciell fyrhörning som vi konstruerat (8b). Dessa uppgifter ser vi dock som svåra och således är vi inte särskilt överraskade över resultaten.

Kommentar:
Relativt väntade resultat, med undantaget att oväntat många kunde förklara varför en rektangel är en parallellogram. Resultatet för uppgiften där tre av vinklarna i en fyrhörning namngetts med bokstäver och den fjärde skulle bestämmas (4), tyckte vi var svagt. Av erfarenhet från vår egen skoltid vet vi dock att det är svårt att hantera uttryck där bokstäver ingår. Vad gäller uppgiften där eleverna ska bestämma kvadratens sida då dess area är given, så borde resultatet varit bättre. Vi menar att de, i större utsträckning, borde känna till hur man bestämmer sidans längd då man vet kvadratens area, d.v.s. genom att dra roten ur.[10] Att det inte rörde sig om heltal borde inte spela någon roll då eleverna hade tillgång till miniräknare.

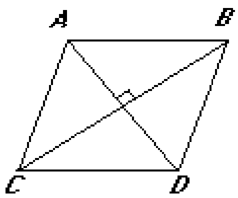
Problemlösning

Svagt resultat.

Kommentar:
I uppgiften (9) där det gällde att först beräkna arean av en kvadrat och sedan subtrahera med dess inskrivna kvadrats area (se figur nedan), var det svåraste att bestämma den inskrivna kvadratens sida. Detta sker lämpligen med Pythagoras sats. Ett alternativ är att direkt i figuren observera att arean av det vita området är lika stort som arean av det svarta.



Svårigheten i den andra problemlösningsuppgiften (10) är att känna till att rombens fyra sidor är lika långa och att dess diagonaler delar varandra i rät vinkel (se figur nedan). Används Pythagoras sats borde således uppgiften bli relativt enkel.



[10] Se även begreppskartan sidan 5.

Vinklar

Vinklar	Totalt (%)
Hela testet	42
Namnge	26
Egenskaper	42
Problemlösning	64

Namnge

Svagt resultat.

Uppgifter med bra resultat: Sidovinklar/supplementvinklar (1a), vertikal/motstående vinklar (1b).
Uppgifter med mindre bra resultat: Likbelägna vinklar (1c), alternatvinklar (1d).

Kommentar:
Vi tror att dessa begrepp behandlas väl översiktligt i kurserna. Begreppen utnyttjas vid för få tillfällen i undervisningen.

Egenskaper

Blandat resultat.

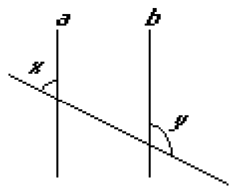
Uppgifter med bra resultat: Vad en vinkel som är 90º kallas (2), förklara skillnaden mellan spetsig och trubbig vinkel (3), vad en linje som delar en vinkel i två lika stora delar kallas (4).
Uppgifter med mindre bra resultat: Förklara innebörden av att en linje är normal till en annan (5), förklara begreppen komplement/supplementvinkel (7).

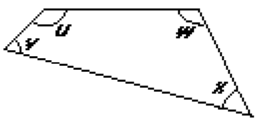
Kommentar:
Vi tycker att resultatet för bisektris var oväntat bra, särskilt med tanke på att eleverna hade svårt att definiera liknande begrepp som median (T/C 5b) och normal. Största problemet när det gäller normalens egenskaper är att man inte vet att den är vinkelrät med en annan linje. Att eleverna kunde förklara vad en vinkel som är $90°$ kallas och skillnaden mellan en spetsig och trubbig vinkel tycker vi är något som var förväntat och som alla gymnasieelever borde kunna.

Problemlösning

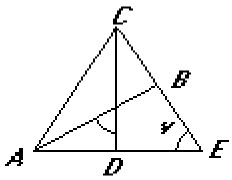
Bra resultat.

Kommentar:
Bra och förväntat resultat på uppgifterna (8, 9) där det gällde att bestämma en vinkel då vissa förutsättningar fanns givna (se figurer nedan).





Däremot tycker vi att det är logiskt att den sista problemlösningsuppgiften (10) inte gick lika bra (se figur nedan). I denna uppgift gällde det att bestämma en vinkel efter att först ha bestämt några andra vinklar i figuren. Detta blir svårt eftersom vi väver in många begrepp i en och samma fråga samt att uppgiften måste lösas i olika etapper.



Rymdgeometri

Rymdgeometri	Totalt (%)
Hela testet	48
Namnge	89
Egenskaper	38
Problemlösning	26

Namnge

Mycket bra resultat.

Kommentar:
Vi tror att detta beror på att de figurer som vi har valt är relativt vardagliga. Exempelvis konen som kan förekomma på fotbollsträningen och pyramider som finns i Egypten.

Egenskaper

Blandat resultat

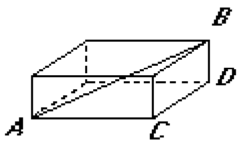
Uppgifter med bra resultat: Antalet hörn i ett rätblock (7a), hur man bestämmer volymen av en rak cirkulär cylinder (4a).
Uppgifter med mindre bra resultat: Förklara tetraederns utseende (2), hur man beräknar volymen av ett klot (4b), antalet kanter i ett rätblock (7b).

Kommentar:
Frågorna rörande tetraeder och storcirkel (6) tycker vi kan anses vara överkurs, eftersom de är begrepp som tas upp i mån av tid. Detta bidrar till de förhållandevis dåliga resultaten. På frågan: Vilken rymdgeometrisk figur som har volymen a^3 tycker vi att resultatet var oväntat svagt, dock borde vi här ha angett att figurens sida var a enheter lång. Vad gäller frågorna där man ska ange formler, är vi inte så överraskade över resulten, eftersom formler oftast kan hittas i formelsamlingar. Exempel på sådana uppgifter är då eleven ska förklara hur man beräknar volymen av en rak cirkulär cylinder eller ett klot.

Problemlösning

Svagt resultat.

Kommentar:
Uppgiften (9) där eleverna ska beräkna en rymddiagonal i ett rätblock (se figur nedan) löses enkelt genom att Pythagoras sats används två gånger. Många elever har istället försökt att lösa uppgiften på annat sätt.[11] En allmän svårighet är att finna en metod som ska användas för att lösa en uppgift, då detta inte anges. Speciellt gäller detta uppgifter där lösningar ska genomföras i flera steg.



Allmän del

Eftersom resultatet på denna del var så svagt kan inga andra slutsatser dras än att eleverna inte har någon vidare kännedom om innebörden av begreppen definition, sats och bevis.

En uppgift som ändå besvarades förhållandevis bra är: Vad är en sats? Ge ett exempel (12). Det mest frekventa svaret var Pythagoras sats, vilket vi också förväntade oss. Vi tror att det är den flitigast använda satsen på gymnasiet. Dock är detta ett exempel på en sats och inte en förklaring av vad en sats är.

Den avslutande uppgiften, där vi påstod att $1 = 2$ och gav ett ”bevis” för detta (15), anser vi vara svår. Detta stämmer också bra överens med svaren, ty endast en elev lämnade in ett svar, ett halvhjärtat sådant.

[11] Se *Övr. sv.* (R9), sid. 65.

5.2 Pojkar/flickor

Samtliga test	P (%)	F (%)	O (%)
Samtliga uppgifter	39	42	48
Namnge	50	60	61
Egenskaper	31	36	42
Problemlösning	34	31	40

Trianglar/Cirklar	P (%)	F (%)	O (%)
Hela testet	27	27	37
Namnge	38	41	57
Egenskaper	25	27	36
Problemlösning	19	13	17

Fyrhörningar	P (%)	F (%)	O (%)
Hela testet	37	35	58
Namnge	57	65	85
Egenskaper	29	30	49
Problemlösning	25	10	39

Vinklar	P (%)	F (%)	O (%)
Hela testet	43	48	48
Namnge	27	45	22
Egenskaper	40	51	40
Problemlösning	62	47	81

Rymdgeometri	P (%)	F (%)	O (%)
Hela testet	49	58	52
Namnge	86	95	92
Egenskaper	35	40	43
Problemlösning	25	38	20

Att jämföra resultatet för pojkar och flickor blir inte så intressant som vi tänkt oss från början. Varje test besvarades av fler pojkar än flickor och dessutom så var antalet som inte angivit kön väldigt stort. Alltså de som vi kallat okända (O). Trots detta vill vi redovisa de slutsatser vi ändå dragit utifrån materialet vi har till förfogande.

- Flickor är generellt bättre på att namnge figurer inom geometrin och har lättare för att, med ord, förklara egenskaper hos begrepp (se tabell: samtliga test, *namnge* och *egenskaper*).

- Pojkar är generellt bättre på problemlösning (se tabell: samtliga test, *problemlösning*).

- En observation vi gjort är att flickor över lag svarar med mer utförliga resonemang, medan pojkar föredrar kortare beskrivningar. Ett exempel på detta är då eleverna skulle förklara hur de gör för att beräkna volymen av en rak cirkulär cylinder (R10a). Ett typiskt svar från en flicka är: ”$V = B \cdot h$. *Först räknar man ut basytan genom att ta* $r \cdot r \cdot p$ *, sedan gångar man basytan med höjden.*” Ett vanligt svar från en pojke är däremot: ”$r^2 \cdot p \cdot h$”.

- Pojkar använder ofta en åskådliggörande bild för att förklara ett begrepp, medan flickor i större utsträckning beskriver med ord. Ett konkret exempel på detta är uppgiften där eleverna ska förklara begreppet hypotenusa (T/C2). De flesta pojkar ritar här en rätvinklig triangel och markerar den längsta sidan, d.v.s. hypotenusan, medan merparten av flickorna istället beskriver det som att hypotenusan är den längsta sidan i en rätvinklig triangel.

5.3 Teoretiskt/yrkesförberedande program

Samtliga test	**T. P. (%)**	**Y. P. (%)**
Samtliga uppgifter	50	32
Namnge	61	48
Egenskaper	44	27
Problemlösning	45	23

Trianglar/Cirklar	**T. P. (%)**	**Y. P. (%)**
Hela testet	43	22
Namnge	53	41
Egenskaper	42	22
Problemlösning	35	4

Fyrhörningar	**T. P. (%)**	**Y. P. (%)**
Hela testet	54	31
Namnge	76	54
Egenskaper	48	24
Problemlösning	39	14

Vinklar	**T. P. (%)**	**Y. P. (%)**
Hela testet	48	36
Namnge	31	17
Egenskaper	45	36
Problemlösning	69	56

Rymdgeometri	**T. P. (%)**	**Y. P. (%)**
Hela testet	57	41
Namnge	93	83
Egenskaper	43	29
Problemlösning	34	11

- Eleverna på teoretiska program klarade av testen avsevärt bättre än eleverna på yrkesförberedande program. Det var ett förväntat resultat, eftersom det generellt är så att de elever från högstadiet som har höga betyg väljer teoretiska program.

- De yrkesförberedande eleverna klarade problemlösningsdelen på testet vinklar bäst, dock var deras resultat även här svagare än vad resultatet för eleverna på teoretiska program var. Till en början tänkte vi att en trolig förklaring till detta kunde vara att elever på yrkesförberedande program, särskilt bygg- och industriprogrammen, ofta använder vinklar av olika slag i sina karaktärsämnen. Dock såg vi senare att merparten av de yrkesförberedande eleverna hörde hemma på media- och kommunikationsprogrammet.

- De yrkesförberedande eleverna tänker ofta i bilder, vilket vi konstaterar när vi läser svar som akvarium/låda (R1b) och rör (R1a). Teoretiska elever uttrycker sig oftare med ord.

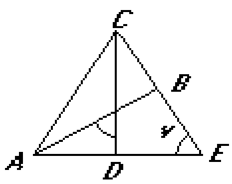
5.4 Genomgående problematik

- Genomgående förväxlar eleverna begrepp med liknande innebörd: liksidig/likbent triangel (T/C4), cirkelsegment/cirkelsektor (T/C1d), medelpunktsvinkelsatsen/randvinkelsatsen (V8,9) och parallelltrapets/parallellogram (F1b).

- Vi kan konstatera att när elever ej kan en uppgift är det vanligt att ord plockas från vardagen. Detta gäller, som vi tidigare varit inne på, särskilt elever från yrkesförberedande program. Exempel på sådana ord är trekant istället för triangel (T/C1a), tårtbit/färgat område istället för cirkelsektor (T/C1d), rör istället för cylinder samt låda/akvarium istället för rätblock.

- Det är också vanligt att elever missuppfattar frågeformuleringen. Ett exempel på detta är uppgiften där vi frågar efter skillnaden mellan spetsvinklig/trubbvinklig triangel (T/C3). Svaret som ungefär hälften av eleverna ger är skillnaden mellan spetsig/trubbig vinkel.

- Många delmoment i en och samma uppgift försvårar avsevärt för eleven. Detta blir särskilt tydligt i uppgiften (V10) där en vinkel ska bestämmas då man först beräknat ett antal andra vinklar (se figur nedan). Även flera frågeställningar invävda i samma uppgift får liknande effekt. Exempelvis uppgiften: Hur ser en regelbunden tetraeder ut? Kan man säga att den är en pyramid? Motivera (R2).



- När testen konstruerades hade vi en uppfattning om att eleverna skulle ha lättare för att lösa problemuppgifter än för att definiera begrepp och redogöra för egenskaper. I efterhand inser vi att så inte var fallet, åtminstone inte genomgående. Dock vill vi peka på ett fall där vår uppfattning stämde. Resultatet på uppgifterna där eleverna skulle ange vissa centrala vinklar var svagt, $\frac{20+19+5+1}{4} \big/ 43 = 26\%$ (V1a,b,c,d). I uppgiften där det istället gällde att beräkna en vinkel utifrån givna förutsättningar (V8) hade däremot $\frac{35}{43} = 81\%$ svarat rätt.

- Användandet av miniräknare är något som kräver en kommentar. Vi har en fast övertygelse om att man missar grundläggande matematik om man använder sådana redan vid tidiga skeden inom ett område. Det är viktigt att först få en grundläggande förståelse av ett begrepp eller ett räknesätt innan man tar till miniräknare för att underlätta beräkningarna. Vid, exempelvis, beräkningar med de fyra räknesätten tror vi att det finns en klar nackdel med att överdriva användandet av miniräknare. Med detta menar vi att elevers huvudräkning ”tar skada”. Vi tycker att det är överflödigt att använda miniräknare till enkla beräkningar. Vidare tappar elever känslan för värdet av ett tal. Det är nog också lätt att man förlitar sig helt på räknaren och inte kritiskt granskar om det erhållna resultatet är rimligt.

5.5 Enskilda uppgifter

- Vi vill börja med att lyfta fram de uppgifter som behandlar Pythagoras sats. Resultaten i dessa uppgifter är mycket svaga. De uppgifter där Pythagoras kan vara lämplig att använda är F9, F10 och R9. Sammanlagt på dessa tre uppgifter har 43 korrekta svar, av 199 möjliga, angivits. Utmärkande för dessa uppgifter är att det inte framgår tydligt att Pythagoras sats kan tillämpas. Vi är övertygade om att ett betydligt bättre resultat hade erhållits om vi istället gett ledningen att Pythagoras sats kan användas. Detta stärker vårt resonemang om att en del elever har svårt att förstå hur en uppgift ska lösas.

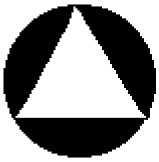
- Rektangel/parallellogram (F3) förväxlas inte i samma utsträckning som parallelltrapets/parallellogram (F2). Detta tror vi beror på att rektanglar är mer förekommande vardagliga figurer än parallellogram och parallelltrapetser. En annan anledning till att parallellogram och parallelltrapets förväxlas i större utsträckning kan bero på att de har likartade namn.

- Vi jämför resultaten på uppgifterna: Du känner tre av vinklarna i en parallellogram. Kalla dem v, u och w. Hur stor är då den fjärde vinkeln z? (F4) och Beräkna vinkeln x då vinklarna v, u och w är $75°$, $110°$ resp. $135°$ (V9). Resultatet är $\frac{32}{43} = 74\%$ (V9) och $\frac{27}{70} = 39\%$ (F4). Frågeställningarna i uppgifterna är snarlika, men resultaten skiljer sig avsevärt. Vi tror att detta beror på elevers svaghet att räkna med bokstäver. De inser inte att en bokstav, i detta fall, symboliserar ett värde på vinkeln.

- I en jämförelse, av uppgiften där vi ber eleverna att redogöra för en formel för att beräkna en rak cirkulär cylinders volym (R4a) och uppgiften där vi vill se en tillämpning av samma formel (R10a), skiljer sig resultaten stort. Resultaten $\frac{47}{59} = 80\%$ (R4a) och $\frac{34}{59} = 58\%$ (R10a) visar tydligt att eleverna behärskar formeln, men att de inte i lika stor utsträckning kan använda denna.

- Eleverna har generellt lättare för att härleda formler för figurer som är konkreta. Vår uppfattning stärks genom att titta på resultatet för uppgifterna där eleverna ska redogöra för cylinderns och klotets volymer (R4a,b). Resultatet för cylindern är $\frac{47}{59} = 80\%$ och för klotet $\frac{14}{59} = 24\%$. Detta tror vi inte bara beror på att cylindern är en mera konkret figur än klotet, utan även på att formeln för klotets volym är svårare att memorera för eleven. Vi tar dock inte så hårt på detta resultat, eftersom man oftast har tillgång till en formelsamling vid sådana beräkningar.

- Elever hänger ofta upp sig på invanda modeller. Exempelvis när de ska räkna ut arean av en triangel. I matematikböcker är den vanligaste förekommande formeln för detta $A = \frac{b \cdot h}{2}$, där b betecknar basen och h står för höjden. När det i uppgifter dyker upp andra beteckning på triangelns sidor blir det svårare. Eleverna förstår helt enkelt inte vad de gör, utan följer ett mekaniskt mönster. Ett exempel på detta finner vi i uppgiften (T/C10) där arean av ett område, som ligger mellan en cirkel och den till cirkeln inskrivna liksidiga triangeln, ska beräknas (se figur nedan). Beräkning av cirkelns area utgör oftast ingen svårighet för eleven, däremot har många svårt för att beräkna arean av den till cirkeln inskrivna triangeln. Vi tror att ett vanligt fel är att eleven beräknar den liksidiga triangelns area som om triangeln vore rätvinklig. En annan anledning till att uppgiften blir svår är att den ska lösas i flera steg.



- Att beräkna arean av en triangel, där man först ska bestämma höjden, är svårt. I dagens undervisning är det vanligt att eleverna får allt serverat. En uppgift där figurens sidor eller höjd finns utmärkta, blir enkel för eleven att lösa. Det enda som behöver göras är att sätta in de givna värdena i en formel. Vi tror att elever får en ökad förståelse, av de olika begreppen, genom att istället göra beräkningar på figurer i naturlig storlek. För att eleverna ska kunna lösa problemet måste de bestämma sträckornas längd. Exempelvis, för att mäta höjden i en figur, så måste man veta att denna är vinkelrät mot motstående bas.

6 Slutsatser

Vi hade två övergripande syften med uppsatsen. För det första ville vi förklara vad en begreppskarta är, hur en sådan är uppbyggd och vad den kan användas till. För det andra ville vi testa gymnasieelevers kunskaper i geometri. Vi ställde, i syftesdelen, också upp ett antal frågeställningar som vi nu ska försöka besvara och resonera kring.

Vår definition av en begreppskarta: En begreppskarta är en mängd av begrepp som är ordnade efter ett visst logiskt mönster. Förståelsen av ett begrepp underlättas om det kan relateras till andra begrepp och genom att man känner till relationerna mellan begreppen. Det gemensamma för alla begreppskartor är att det alltid finns en slags struktur för dess uppbyggnad. Varje begreppskarta blir dock unik beroende på konstruktör och användningsområde.

Med utgångspunkt från testresultaten har vi fått uppfattningen att det finns stora brister inom klassisk geometri hos elever på gymnasiet. Stora svårigheter finns då elever ska förklara egenskaper hos begrepp, men också då dessa tillämpas vid problemlösning. Att elever skulle ha svårt för att förklara egenskaper hos, de av oss uppställda, begreppen var förväntat. Men i problemlösningsdelen trodde vi på ett bättre resultat. Vi kan inte ge ett fullständigt svar på vad svårigheterna beror på. Vi kan dock dra vissa slutsatser utifrån resultaten på våra tester och ge förslag på vad man skulle kunna göra för att situationen ska bli bättre (se nedan).

Eftersom så många elever avstod från att ange kön kan vi, som vi tidigare konstaterat, inte dra några långtgående slutsatser. Vi ger ändå några korta kommentarer utifrån det erhållna resultatet. Flickor ger generellt längre och utförligare förklaringar, medan pojkar föredrar kortare beskrivningar. Pojkar åskådliggör ofta sina tankar med bilder, medan flickor föredrar att svara med ord.

Med stöd av testresultaten kan vi konstatera att elever på teoretiska program har bredare kunskaper i geometri än elever på yrkesförberedande program. Generellt sett kan det vara så att elever med bäst förkunskaper väljer teoretiska program, samtidigt som de ofta är mer studiemotiverade. Om så är fallet låter vi vara osagt, eftersom yrkesförberedande elever istället kan ha en mer praktisk kunskap som sällan mäts i tester som denna. Den slutsats vi kan dra av våra resultat är att yrkesförberedande elever oftare använder bilder för att uttrycka sig.

Vi är övertygade om att lärare kan ha hjälp av begreppskartor i sin undervisning. Vi känner också att vi i vårt framtida lärararbete vill använda oss av sådana. Begreppskartor kan underlätta lärarens lektionsplanering samtidigt som de kan hjälpa eleverna att följa med i undervisningen, underlätta förståelsen hos några begrepp och se hur dessa hänger ihop med andra begrepp. Vi vill dock påpeka att begreppskartor kanske inte för något bra med sig till alla som kommer i kontakt med dem. De ska ses som ett av många didaktiska hjälpmedel. Använder man sig av begreppskartor tror vi att de får en optimal effekt om eleverna själva ges tillfälle att konstruera sina egna kartor och får möjligheter att diskutera sina förslag. Även lärarna bör göra sina egna begreppskartor för att då, i så stor utsträckning som möjligt, anpassa dem till sin undervisning och kursens mål.

7 Källförteckning

Abrahamsson, Fredrik, *Förkunskaper i matematik hos elever vid övergången från grundskolan till gymnasiet*. Växjö: Växjö universitet, 1999.

Ausubel, David, *Educational psychology*. New York: Rinehart and Winston, 1978.

Björk, Lars-Eric, *Matematik 2000 kurs A*. Stockholm: Natur och kultur, 1993.

Björup, Kjell, *Delta (orange) kurs A*. Malmö: Gleerups, 1998.

Björup, Kjell, *Delta (orange) kurs B*. Malmö: Gleerups, 1999.

Bonniers multimedialexikon, 1998.

Engström, Arne, *Reflektivt tänkande i matematiken*. Stockholm: Almqvist & Wisell International, 1997.

Furness, Anthony, *Mönster i matematiken*. Solna: Ekelund, 1988.

Grevholm, Barbro, *Läraren som forskare i matematikdidaktik. Några exempel och reflektioner.*

Grevholm, Barbro, *Teacher students development of concepts in mathematics and mathematics education.*

Grevholm, Barbro, *Vi skriver $y = x + 5$. Vad betyder det?*

Jarrick, Arne, *Från tanke till text*. Lund: Studentlitteratur, 1996.

Lindblad, Inga-Britt, *Uppsatsarbete.* Lund: Studentlitteratur, 1998.

Novak, Joseph, *Metalearning and metaknowledge strategies to help students learn how to learn.*

Orton, Anthony, Wain, Geoffrey, Issues in teaching mathematics, 1994.

Skolöverstyrelsen, *Matematikterminologi i skolan*. Stockholm: Liber, 1979.

Strömquist, Siv, *Uppsatshandboken*. Uppsala: Hallgren & Fallgren, 1999.

Tengstrand, Anders, *Klassisk geometri*. Växjö: Högskolan i Växjö, 1996.

Thompson, Jan, *Wahlström & Widstrands matematiklexikon*. Stockholm: Wahlström & Widstrand, 1991.

8 Bilagor

8.1 Resultat

Vi har valt att redovisa våra resultat, dels som totalresultat, dels uppgift för uppgift. Totalresultatet är en översikt för hur gymnasieeleverna i allmänhet klarade testen. I delen som behandlar enskilda uppgifter redogörs istället för en uppgift i taget. Här försöker vi analysera de mest frekventa felaktiga svaren och dessutom ge en kort analys till varje uppgift. För överskådlighetens skull och för att underlätta för läsaren har frågorna upprepats innan resultatet redovisats i form av en tabell.

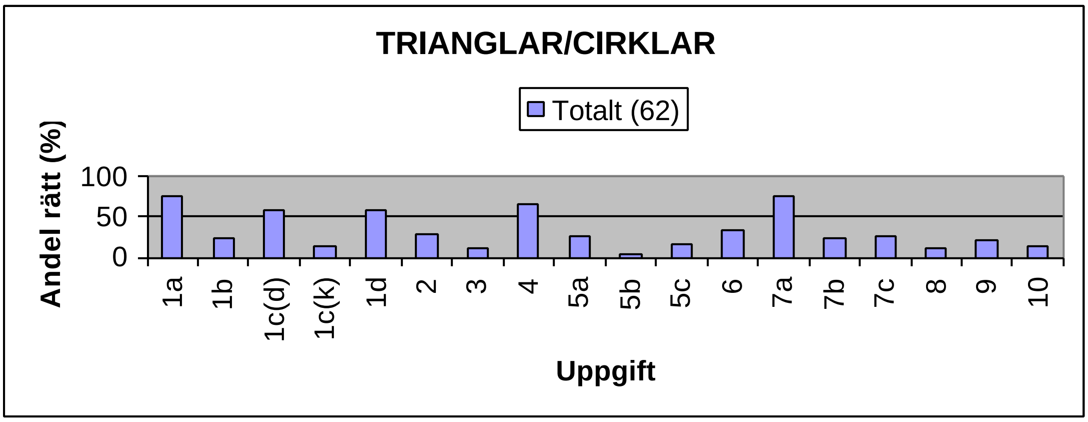
Totalresultat

Totalresultatet redovisas i form av diagram som är indelade efter kategorierna Totalt, Pojkar/flickor och Teoretiskt/yrkesförberedande program.

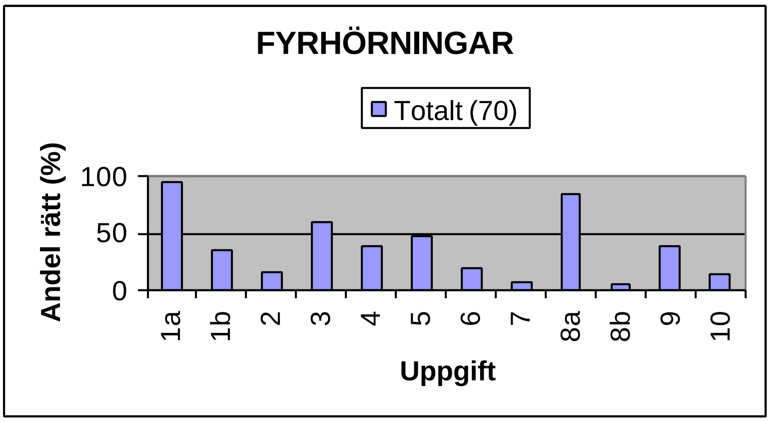
Totalt är en sammanställning av alla svarandes samtliga inlämnade uppgifter, där det inte tagits någon hänsyn till kön, program o.s.v. Diagrammen som jämför pojkar och flickor åskådliggör skillnaden mellan pojkarnas resp. flickornas svar. Slutligen jämförs elever på teoretiska program med elever på yrkesförberedande program.

Totalt

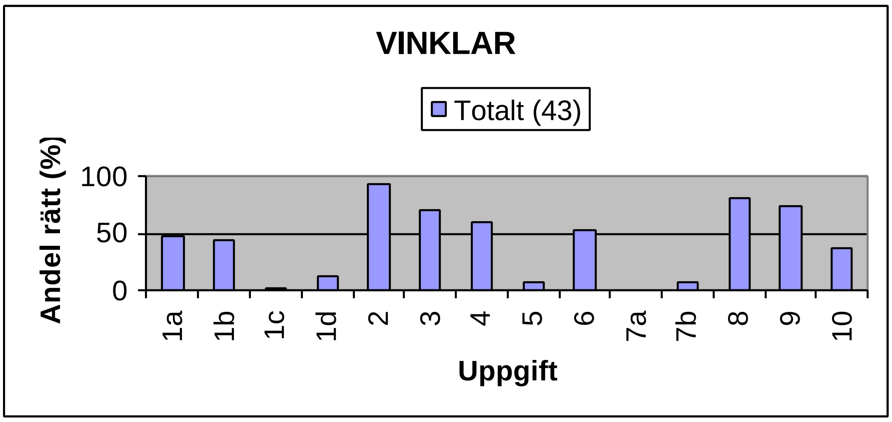
Med den lodräta axeln som kallats "Andel rätt" avses hur många elever som angivit korrekt svar på de olika uppgifterna. Det maximala värdet på denna axel varierar beronde på antalet elever som har genomfört testen. Den vågräta axeln anger på samma sätt vilken uppgift som avses.



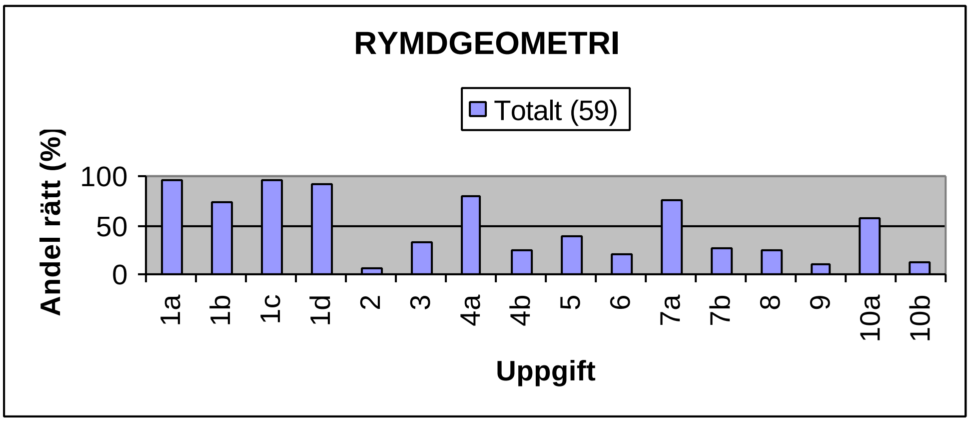
Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-8 testar egenskaper och 9-10 är problemlösningsuppgifter. 1c(d) och 1c(k) betecknar uppgift 1c (diameter) resp. 1c (korda).



Uppgift 1a-1b avser testdelen namnge, 2-8b testar egenskaper och 9-10 är problemlösningsuppgifter.



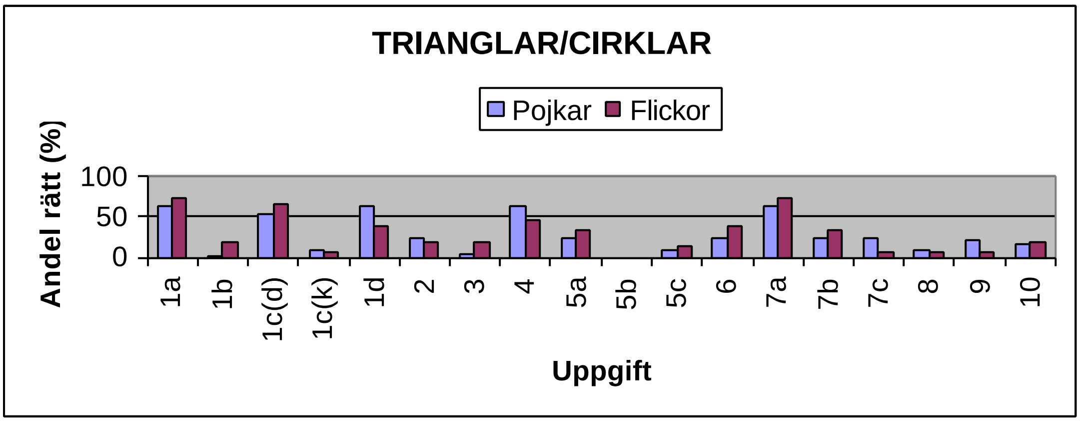
Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-7b testar egenskaper och 8-10 är problemlösningsuppgifter.



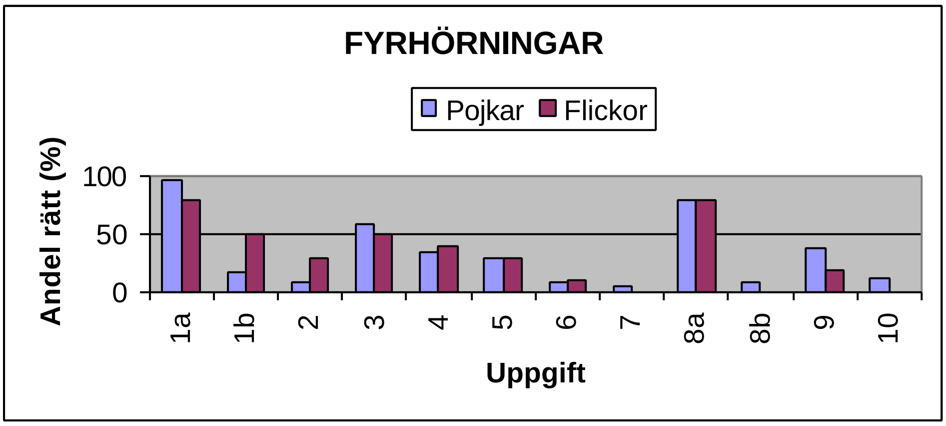
Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-7b testar egenskaper och 8-10 är problemlösningsuppgifter.

Pojkar/flickor

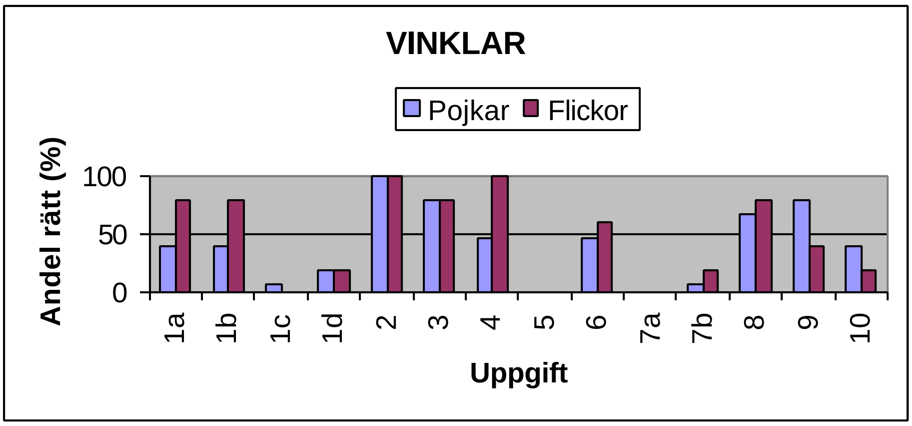
Diagrammen visar den procentuella svarsfrekvensen för pojkar resp. flickor. De elever som inte angivit namn har kategoriserats som okända. I diagrammen har de okändas svar ej beaktats då syftet med diagrammen är att jämföra pojkarnas och flickornas resultat.



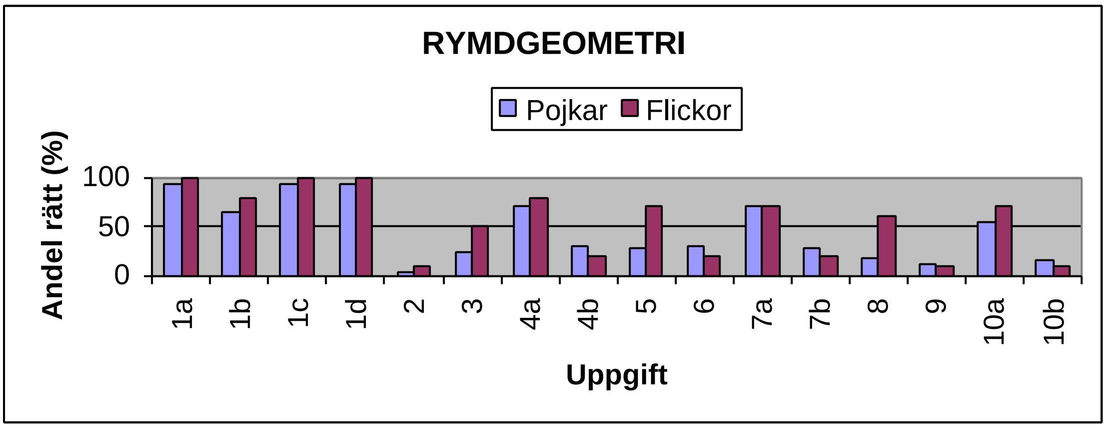
Fördelningen bland de svarande var: 24 pojkar, 15 flickor och 23 okända.
Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-8 testar egenskaper och 9-10 är problemlösningsuppgifter.
1c(d) och 1c(k) betecknar uppgift 1c (diameter) resp. 1c (korda).



Fördelningen bland de svarande var: 34 pojkar, 10 flickor och 26 okända.
Uppgift 1a-1b avser testdelen namnge, 2-8b testar egenskaper
och 9-10 är problemlösningsuppgifter.



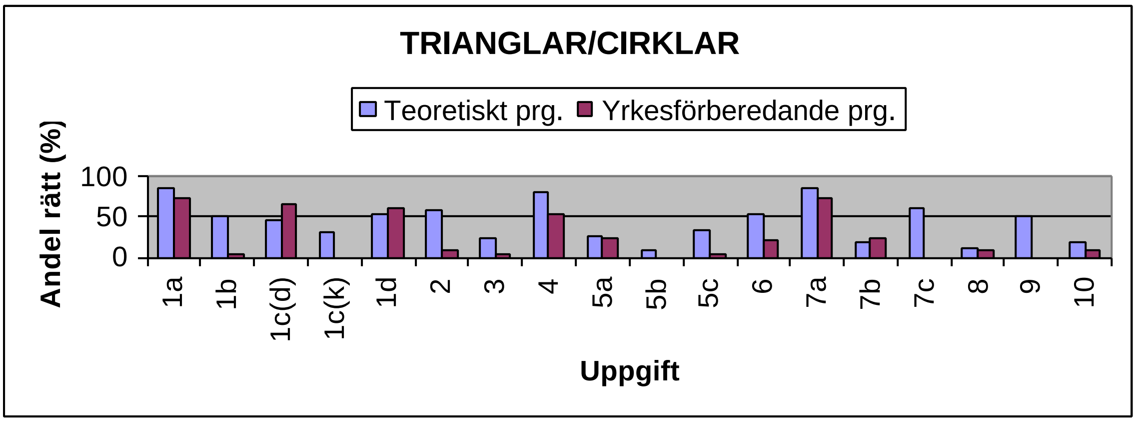
Fördelningen bland de svarande var: 15 pojkar, 5 flickor och 23 okända.
Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-7b testar egenskaper
och 8-10 är problemlösningsuppgifter.



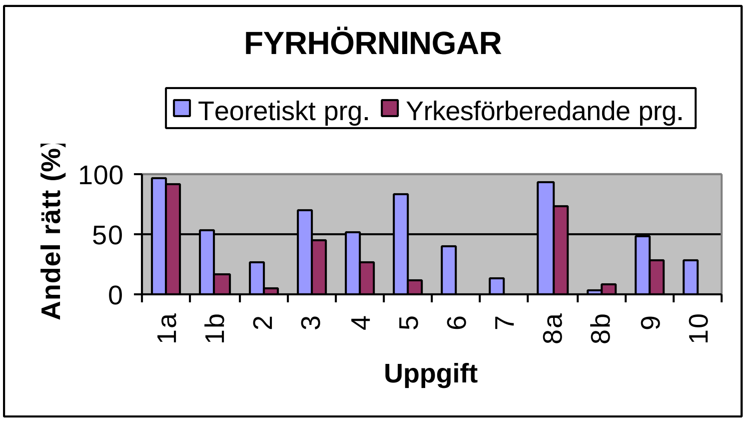
Fördelningen bland de svarande var: 33 pojkar, 10 flickor och 16 okända.
Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-7b testar egenskaper
och 8-10 är problemlösningsuppgifter.

Teoretiskt/yrkesförberedande program

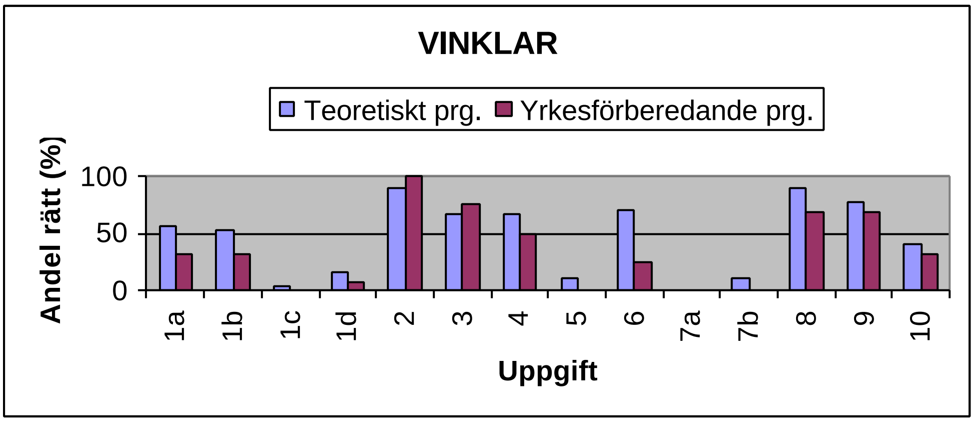
Diagrammen är redovisade i procentuell form eftersom eleverna från teoretiska- resp. yrkesförberedande program normalt inte utgör lika stora grupper.



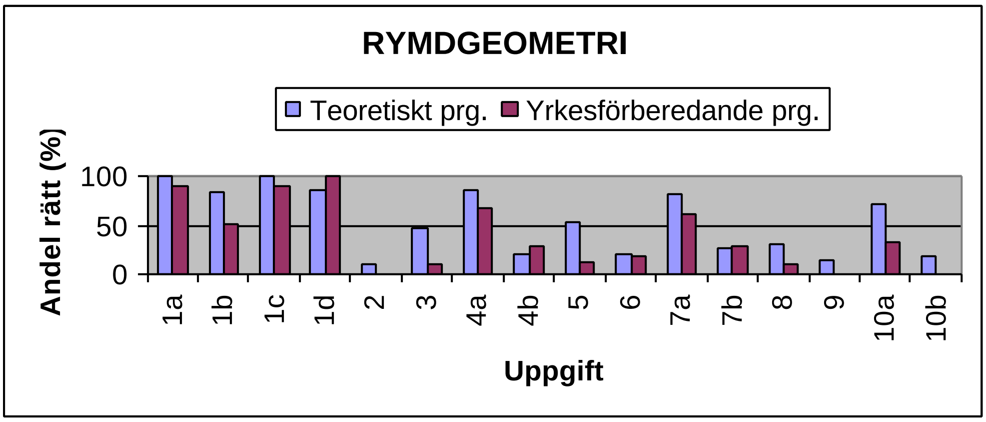
Fördelningen bland de svarande var: 26 från teoretiska program och 36 från yrkesförberedande program.
Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-8 testar egenskaper och 9-10 är problemlösningsuppgifter.
1c(d) och 1c(k) betecknar uppgift 1c (diameter) resp. 1c (korda).



Fördelningen bland de svarande var: 35 från teoretiska program
och 35 från yrkesförberedande program.
Uppgift 1a-1b avser testdelen namnge, 2-8b testar egenskaper
och 9-10 är problemlösningsuppgifter.



Fördelningen bland de svarande var: 27 från teoretiska program och 16 från yrkesförberedande program. Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-7b testar egenskaper och 8-10 är problemlösningsuppgifter.



Fördelningen bland de svarande var: 38 från teoretiska program och 21 från yrkesförberedande program. Uppgift 1a-1d avser testdelen namnge, 2-7b testar egenskaper och 8-10 är problemlösningsuppgifter.

Enskilda uppgifter

Vi har valt att redovisa ett test i taget. För tydlighetens skull har vi också lagt in underrubriker med samma namn som testets benämning. Resultatet redovisas i ordningen *trianglar/cirklar*, *fyrhörningar*, *vinklar*, *rymdgeometri*, samt *allmän del*.

Nedan tydliggörs tabellernas uppbyggnad.

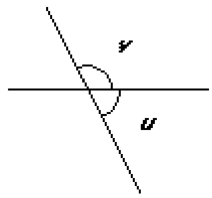
Först har vi upprepat den till tabellen hörande frågeformuleringen. Tot. (*x*) är en förkortning av totalt, där *x* anger antalet elever som har genomfört testet. P, F och O står för pojkar, flickor resp. okända. I kolumnen O har de elever som ej uppgivit namn placerats. T.P. och Y.P. är förkortningar av teoretiska program och yrkesförberedande program.

Svaren har till en början delats upp i kategorierna **Rätt** och **Fel**. I fallen då det förekommer flera korrekta resp. felaktiga svar, delas även dessa in i olika kategorier. De felaktiga svaren har vanligtvis delats in i tre kategorier. Det mest frekventa felaktiga svaret redovisas först, därefter följer övriga svar (*Övr. sv*.) och svar saknas (*Ej sv*.). I *Övr. sv*. finns svar som förekommer enstaka gånger, svar som vi anser vara chansningar eller som inte har med frågan att göra. Under rubriken *Ej sv*. har vi samlat de elever som lämnat in blankt.

I denna tabell finns svar från 43 deltagare, varav 20 anses korrekta och 23 felaktiga. Av de 43 deltagarna i testet är 15 pojkar, 5 flickor och 23 okända. 27 elever kommer från teoretiska program medan 16 elever studerar på yrkesförberedande program. Av de 20 korrekta svaren utgörs 18 av sidovinklar och 2 av supplementvinklar. De 23 felaktiga svaren är på samma sätt fördelade på komplementvinklar, övriga svar och svar saknas. 6 av de 20 korrekta svaren har pojkar angivit, 4 har flickor angivit och de resterande 10 kommer från okända. På samma sätt utläses att 15 av de 20 korrekta svaren har angivits av elever på de teoretiska programmen och återstående 5 av elever från yrkesförberedande program. Varje rad i tabellen är sedan likadant uppbyggd.

1. Vad kallas vinkelparet v och u?

a)



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	20	6	4	10	15	5
Kat 1	18	5	4	9	13	5
Kat 2	2	1	0	1	2	0
Fel	23	9	1	13	12	11
Kat 3	4	1	0	3	4	0
Övr. sv.	5	3	0	2	0	5
Ej sv.	14	5	1	8	8	6

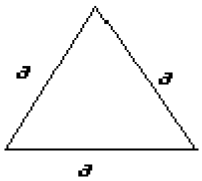
Kat. 1: Sidovinklar.
Kat. 2: Supplementvinklar.
Kat. 3: Komplementvinklar.
Övr. sv. Parallella vinklar, likbenta vinklar och spetsig/trubbig vinkel.

Trianglar/Cirklar

Detta test har 62 elever genomfört, varav 26 st. kommer från teoretiska program och 36 st. från yrkesförberedande program. Av eleverna från yrkesförberedande program är fördelningen 17 st. från media- och kommunikationsprogrammet (MP), 13 st. från handel- och administrationsprogrammet (HP), 3 st. från industriprogrammet (IP) och 3 st. från elprogrammet (EC). Av eleverna från teoretiska program är 20 st. från en naturvetenskaplig klass (NV) och 6 st. från en blandad klass bestående av natur- eller samhällselever (NVS). Könsfördelningen hos de svarande är 24 pojkar, 15 flickor och 23 okända.

1. Namnge:

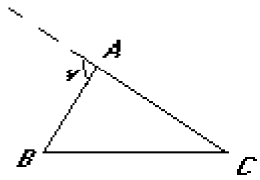
a) vad kallas triangeln?



	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	48	15	11	22	22	26
Kat 1	48	15	11	22	22	26
Fel	14	9	4	1	4	10
Kat 2	9	4	4	1	4	5
Övr. sv.	4	4	0	0	0	4
Ej sv.	1	1	0	0	0	1

Kat. 1: Liksidig triangel.
Kat. 2: Likbent triangel. Eleverna har förväxlat begreppen likbent och liksidig triangel. Ett troligt scenario är att man helt enkelt bara blandat ihop namnen. Ett annat kan vara att den svarande har tyckt att figuren ser likbent ut och inte observerat att samtliga sidor är a långa, vilket automatiskt borde föra tankarna till lika sidor, d.v.s. en liksidig triangel.
Övr. sv. Exempelvis trekant och rätvinklig triangel. Dessa svar visar tydligt att de svarande inte är förtrogna med elementära geometriska begrepp.

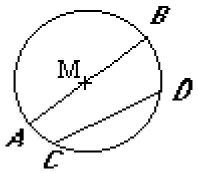
b) vad kallas vinkeln v till vinkeln BAC i triangeln?



	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	14	1	3	10	13	1
Kat 1	10	1	2	7	9	1
Kat 2	4	0	1	3	4	0
Fel	48	23	12	13	13	35
Kat 3	11	7	1	3	0	11
Övr. sv.	7	1	2	4	4	3
Ej sv.	30	15	9	6	9	21

Kat. 1: Yttervinkel.
Kat. 2: Supplementvinkel. När vi granskade vår frågeformulering närmare, insåg vi att även detta svar måste anses korrekt. Detta eftersom summan av vinkeln v, som vi sökte benämningen på, tillsammans med vinkeln BAC, blir $180°$. Enligt detta resonemang måste man också kunna säga att vinkeln v är supplementvinkel till vinkeln BAC.
Kat. 3: I denna kategori har vi samlat de svar som utgörs av trubbig eller rät vinkel. Dessa svar tyder klart på att den svarande slarvat med att läsa frågeformuleringen och istället bara tittat i figuren och då ansett att vinkeln ser ut att vara trubbig eller rät.
Övr. sv. T. ex att den sökta vinkeln v är summan av vinklarna ABC och BCA. Detta är i och för sig korrekt, men dock inte det vi frågade om. Ett annat svar som förekom var alternatvinkel, vilket känns taget ur luften.

c) M är cirkelns medelpunkt. Vad kallas AB och CD?



(Diameter)

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	36	13	10	13	12	24
Kat 1	36	13	10	13	12	24
Fel	26	11	5	10	14	12
Kat 2	4	1	1	2	4	0
Övr. sv.	7	3	1	3	4	3
Ej sv.	15	7	3	5	6	9

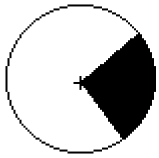
Kat. 1: AB = Diameter.
Kat. 2: Korda. I och för sig kan diametern ses som en korda, således skulle även korda kunnat godkännas. Vi har istället valt att lägga dessa svar som felaktiga eftersom vi i uppgiften ritat in en diameter och en korda, detta för att se om eleverna kunde skilja på begreppen.
Övr. sv. T. ex diagonal, radie, median och bisektris.

(Korda)

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	8	2	1	5	8	0
Kat 1	8	2	1	5	8	0
Fel	54	22	14	18	18	36
Kat 2	10	4	1	5	4	6
Övr. sv.	8	3	4	1	2	6
Ej sv.	36	15	9	12	12	24

Kat. 1: CD = Korda.
Kat. 2: Cirkelsegment. Den svarande missuppfattar frågeställningen och svarar istället med området som begränsas av kordan och tillhörande cirkelbåge, d.v.s. cirkelsegmentet.
Övr. sv. T. ex diagonal, radie, median och bisektris.

d) hur benämns det skuggade området?



	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	36	15	6	15	14	22
Kat 1	36	15	6	15	14	22
Fel	26	9	9	8	12	14
Kat 2	9	1	4	4	6	3
Övr. sv.	7	3	2	2	4	3
Ej sv.	10	5	3	2	2	8

Kat. 1: Cirkelsektor.
Kat. 2: Cirkelsegment. Den svarande har förväxlat definitionerna av cirkelsektor och cirkelsegment.
Övr. sv. T. ex ”tårtbit”, fjärdedel och färgat område.

2. Vad är en hypotenusa?

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	18	6	3	9	15	3
Kat 1	10	2	2	6	8	2
Kat 2	8	4	1	3	7	1
Fel	44	18	12	14	11	33
Kat 3	11	3	2	6	3	8
Övr. sv.	10	4	3	3	7	3
Ej sv.	23	11	7	5	1	22

Kat. 1: Hypotenusan är den längsta sidan i en rätvinklig triangel.
Kat. 2: Med korrekt figur.
Kat. 3: Längsta sidan i en triangel. Detta är delvis korrekt, men man har inte angivit att triangeln ska vara rätvinklig.
Övr. sv. T. ex diagonalen och sneda sidan i en triangel.

3. Förklara skillnaden mellan en spetsvinklig och en trubbvinklig triangel.

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	7	1	3	3	6	1
Kat 1	7	1	3	3	6	1
Fel	55	23	12	20	20	35
Kat 2	37	16	7	14	18	19
Övr. sv.	5	3	1	1	1	4
Ej sv.	13	4	4	5	1	12

Kat. 1: I en spetsvinklig triangel är alla vinklar spetsiga. I en trubbvinklig triangel är en vinkel trubbig och övriga vinklar spetsiga.
Kat. 2: En spetsig vinkel är mindre än $90°$ och en trubbig vinkel är större än $90°$. Man har slarvat med att läsa frågan ordentligt och istället definierat skillnaden mellan en spetsig och trubbig vinkel.
Övr. sv. T. ex har man angivit att skillnaden mellan en spetsvinklig och trubbvinklig triangel beror på sidornas längd, eller att en vinkel ska vara spetsig i den spetsvinkliga och en vinkel ska vara trubbig i den trubbvinkliga triangeln. Någon har även svarat att alla vinklar skall vara trubbiga i den trubbvinkliga.

4. Nämn minst en egenskap hos den likbenta triangeln?

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	40	15	7	18	21	19
Kat 1	12	6	0	6	6	6
Kat 2	28	9	7	12	15	13
Fel	22	9	8	5	5	17
Övr. sv.	9	5	4	0	2	7
Ej sv.	13	4	4	5	3	10

De svar som vi ansett korrekta är: två sidor är lika långa, basvinklarna till dessa sidor är lika stora och höjden delar motstående bas mitt itu.

Tabellen ska utläsas:

Av 40 st. svarande som nämnt minst en korrekt egenskap har 12 st. nämnt en egenskap och 28 st. har nämnt 2 egenskaper. Svarsfrekvensen på de nämnda egenskaperna är 36 st. på att två sidor är lika långa, 27 st. på att basvinklarna till dessa sidor är lika stora och 5 st. på att höjden delar motstående bas mitt itu.

Kat. 1: Angivit en korrekt egenskap.
Kat. 2: Angivit två korrekta egenskaper.
Övr. sv. Dessa svar innebär att man syftar på egenskaper hos den liksidiga triangeln, exempelvis att samtliga sidor är lika långa och/eller att samtliga vinklar är lika stora.

5. Förklara följande begrepp:

a) en höjd i en triangel.

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	16	6	5	5	7	9
Kat 1	10	4	2	4	6	4
Kat 2	6	2	3	1	1	5
Fel	46	18	10	18	19	27
Kat 3	26	7	7	12	16	10
Ej sv.	20	11	3	6	3	17

Kat. 1: En höjd i en triangel är en sträcka mellan ett hörn och fotpunkten för normalen från hörnet till motstående sida eller denna sidas förlängning.
Kat. 2: Korrekt definition åskådliggjord m.h.a. figur. I denna figur har man angivit att vinkeln vid fotpunkten är rät.
Kat. 3: Ofullständig figur. I fallen då man inte tydliggjort att vinkeln vid fotpunkten är rät, har vi valt att kategorisera dessa svar som felaktiga.

b) en median i en triangel.

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	2	0	0	2	2	0
Kat 1	2	0	0	2	2	0
Fel	60	24	15	21	24	36
Kat 2	6	0	2	4	5	1
Övr. sv.	11	6	1	4	5	6
Ej sv.	43	18	12	13	14	29

Kat. 1: En median i en triangel är en sträcka mellan ett hörn i en triangel och motstående sidas mittpunkt.
Kat. 2: Den svarande har angivit att den motstående sidan delas i två delar, men det framgår inte i vilket förhållande detta sker. Några av dessa svar utgörs istället av en figur i samma anda.
Övr. sv. T. ex definition av bisektris, ena sidan hos en triangel och en triangels mittpunkt.

c) en bas i en triangel.

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	10	2	2	6	9	1
Kat 1	6	1	1	4	6	0
Kat 2	4	1	1	2	3	1
Fel	52	22	13	17	17	35
Kat 3	33	14	11	8	10	23
Övr. sv.	5	2	1	2	2	3
Ej sv.	14	6	1	7	5	9

Kat. 1: En bas i en triangel är motstående sida till ett hörn, varifrån motsvarande höjd utgår.
Kat. 2: Korrekt figur. Den svarande har i figuren ritat in tillhörande höjd.
Kat. 3: Den svarande har angivit den ”nedre” sidan, alternativt använt sig av en figur där man enbart markerat sidan som triangeln ”står på”.
Övr. sv. T. ex ena sidan, höjden eller att en bas bara finns i likbenta trianglar.

6. Hur kan man med hjälp av ett cirkelformat föremål beräkna ett värde på p ?

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	22	6	6	10	14	8
Kat 1	10	3	2	5	7	3
Kat 2	12	3	4	5	7	5
Fel	40	18	9	13	12	28
Övr. sv.	4	1	2	1	1	3
Ej sv.	36	17	7	12	11	25

Kat. 1: Genom att mäta omkretsen och dividera denna med diametern.
Kat. 2: Genom att veta cirkelföremålets area och dividera denna med radien i kvadrat.
Övr. sv. T. ex menar den svarande att värdet av p har att göra med arean eller omkretsen, men ej hur dessa förhåller sig.

7. Förklara följande begrepp:

a) cirkelbåge.

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	48	15	11	22	22	26
Kat 1	48	15	11	22	22	26
Fel	14	9	4	1	4	10
Kat 2	9	4	4	1	4	5
Övr. sv.	4	4	0	0	0	4
Ej sv.	1	1	0	0	0	1

Kat. 1: En cirkelbåge är en sammanhängande del av cirkelns omkrets.
Kat. 2: Felaktig figur. Den svarande har markerat två punkter på cirkeln och kordan däremellan.
Övr. sv. T. ex halvcirkel, cirkelsegment och cirkelsektor.

b) cirkelsegment.

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	14	6	5	3	5	9
Kat 1	4	1	2	1	2	2
Kat 2	10	5	3	2	3	7
Fel	48	18	10	20	21	27
Kat 3	14	2	5	7	5	9
Övr. sv.	8	4	0	4	3	5
Ej sv.	26	12	5	9	13	13

Kat. 1: Ett cirkelsegment är ett område som begränsas av en cirkelbåge och kordan mellan bågens ändpunkter.
Kat. 2: Korrekt figur i stil med svaret i kategori 1.
Kat. 3: Cirkelsektor. Den svarande har förväxlat definitionerna av cirkelsektor och cirkelsegment.
Övr. sv. Svaren syftar på segmentets båge eller att cirkelsegmentet är en slags korda.

c) tangent till en cirkel.

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	16	6	1	9	16	0
Kat 1	7	2	0	5	7	0
Kat 2	5	2	0	3	5	0
Kat 3	4	2	1	1	4	0
Fel	46	18	14	14	10	36
Övr. sv.	3	1	0	2	1	2
Ej sv.	43	17	14	12	9	34

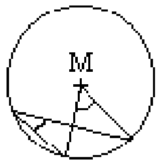
Kat. 1: En tangent till en cirkel är en linje som går genom endast en punkt på cirkeln. Tangenten är vinkelrät mot radien till denna punkt.
Kat. 2: Korrekt figur.
Kat. 3: Den svarande beskriver tangenten som en rak linje, vilken sammanfaller med någon punkt på cirkeln.
Övr. sv. Rak linje, cirkelns omkrets och diameter.

8. Vad kan sägas om randvinkeln, då dess vinkelben står på ändpunkterna till diametern i en cirkel?

	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	6	2	1	3	3	3
Kat 1	2	2	0	0	1	1
Kat 2	4	0	1	3	2	2
Fel	56	22	14	20	23	33
Kat 3	8	2	2	4	6	2
Ej sv.	48	20	12	16	17	31

Kat. 1: Den sökta vinkeln är rät, d.v.s. $90°$.
Kat. 2: Korrekt figur. Man har i figuren markerat att den sökta vinkeln är rät.
Kat. 3: Den svarande har förväxlat det sökta svaret med medelpunktsvinkelsatsen, vilken säger att en medelpunktsvinkel är dubbelt så stor som en randvinkel som står på samma båge.

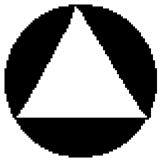
9. *M* är cirkelns medelpunkt. Bestäm den markerade randvinkeln om medelpunktsvinkeln är $48°$.



	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	13	5	1	7	13	0
Kat 1	13	5	1	7	13	0
Fel	49	19	14	16	13	36
Övr. sv.	16	5	3	8	8	8
Ej sv.	33	14	11	8	5	28

Kat. 1: Den sökta vinkeln är $24°$.
Övr. sv. Exempel på hur man har svarat är: $48°$, $96°$, $29°$ och $312°$. De som svarat $48°$ menar att medelpunktsvinkeln och randvinkeln är lika stora. Svaret $96°$ har erhållits genom att man ”tänkt bakvänt” och fördubblat vinkeln i stället för att halvera densamma. $29°$ utgörs av ett räknefel $\left(\frac{48}{2}=29\right)$, vilket inte borde förekomma då eleven haft tillgång till miniräknare. De som svarat $312°$ har subtraherat $48°$ från ett helt varv, d.v.s. $360° - 48° = 312°$.

10. En liksidig triangel är inskriven i en cirkel, d.v.s. dess hörn ligger på randen till cirkeln. Sätt $p = 3.0$. Beräkna arean av det skuggade området, då cirkelns diameter är 8.0 cm och då den liksidiga triangeln har sidan 6.0 cm.



	Tot. (62)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	8	4	3	1	5	3
Kat 1	2	1	0	1	1	1
Kat 2	6	3	3	0	4	2
Fel	54	20	12	22	21	33
Kat 3	7	0	3	4	4	3
Övr. sv.	11	6	2	3	4	7
Ej sv.	36	14	7	15	13	23

Kat. 1: Svaren är liknande vårt tänkta svar, vilket innebär att man först beräknar cirkelns area till 48 cm^2. Sedan beräknas den inskrivna liksidiga triangelns höjd till $\sqrt{27}$ cm, vilket leder till att triangelns area blir $\frac{6}{2} \cdot \sqrt{27}$ cm^2. Den sökta arean fås till $48 - 3 \cdot \sqrt{27} = 3(16 - \sqrt{27})$ cm^2.

Kat. 2: Samma svar har angivits, dock uträknat m.h.a. miniräknare till 32.4 cm^2, d.v.s. en decimal.

Kat. 3: Den svarande har beräknat arean till 30 cm^2. Felet beror på att den inskrivna triangelns area beräknats till 18 cm^2, enligt $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18$, d.v.s. man vet ej hur arean av en liksidig triangel beräknas då man känner dess sida.

Övr. sv. T.ex. 18 cm^2 och 30.4 cm^2. Felet i det förstnämnda svaret är en följd av att triangelns höjd beräknats till 5, istället för $\sqrt{27}$. Vidare har triangelarean, som ett följdfel, beräknats till $5 \cdot 6 = 30$ cm^2. Felet här är alltså inte bara en konsekvens av att triangelns höjd beräknats felaktigt, utan den svarande har även misslyckats med att beräkna triangelns area korrekt. Svaret 30.4 cm^2 följer av att cirkelns area beräknats enligt $3 \cdot 4^2 = 46$ cm^2, d.v.s. ett räknefel. Övriga förekommande svar kan omöjligt ha haft någon genomtänkt beräkning bakom sig.

Fyrhörningar

Detta test har 70 elever genomfört, varav 35 st. kommer från teoretiska program och 35 st. från yrkesförberedande program. Av eleverna från yrkesförberedande program är fördelningen 19 st. från byggprogrammet (BP), 13 st. från HP och 3 st. från EC. Av eleverna från teoretiska program är 18 st. från NV och 17 st. från NVS. Könsfördelningen hos de svarande är 34 pojkar, 10 flickor och 26 okända.

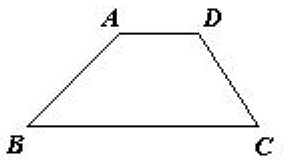
1. Namnge följande fyrhörningar:

a)

	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	66	33	8	25	34	32
Kat 1	66	33	8	25	34	32
Fel	4	1	2	1	1	3
Övr. sv.	3	0	2	1	1	2
Ej sv.	1	1	0	0	0	1

Kat. 1: Rektangel.
Övr. sv. Parallellogram och kvadrat.

b) AD och BC är parallella.



	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	25	6	5	14	19	6
Kat 1	25	6	5	14	19	6
Fel	45	28	5	12	16	29
Kat 2	26	16	3	7	10	16
Övr. sv.	2	0	1	1	2	0
Ej sv.	17	12	1	4	4	13

Kat. 1: Parallelltrapets.
Kat. 2: Parallellogram.
Övr. sv. Romb.

2. Redogör för skillnaden mellan en parallellogram och en parallelltrapets.

	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	11	3	3	5	9	2
Kat 1	11	3	3	5	9	2
Fel	59	31	7	21	26	33
Övr. sv.	10	2	1	7	8	2
Ej sv.	49	29	6	14	18	31

Kat. 1: I en parallelltrapets ska två sidor vara parallella, medan parallellogrammen har parvis parallella sidor.
Övr. sv. Den svarande har redogjort för skillnaden mellan rektangel och parallellogram, har gett ofullständiga bilder eller svarat att i en parallellogram är alla sidor lika långa, detta gäller ej i en parallelltrapets.

3. Varför kan man säga att en rektangel är en parallellogram?

	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	41	20	5	16	25	16
Kat 1	4	3	0	1	1	3
Kat 2	4	3	0	1	2	2
Kat 3	33	14	5	14	22	11
Fel	29	14	5	10	10	19
Övr. sv.	12	2	4	6	7	5
Ej sv.	17	12	1	4	3	14

Kat. 1: Om vinklarna i en parallellogram är $90°$ så kallas den för rektangel.
Kat. 2: Den svarande har genom figur åskådliggjort ovanstående samband.
Kat. 3: Den svarande menar att linjerna i båda figurerna är parvis parallella. Några nämner även att de motstående sträckorna måste vara lika långa. Dessa påståenden gör att rektangeln måste vara en parallellogram.
Övr. sv. T.ex. att sträckorna är lika långa och/eller att figurerna har samma area.

4. Du känner tre av vinklarna i en parallellogram. Kalla dem v, u och w. Hur stor är då den fjärde vinkeln z?

	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	27	12	4	11	18	9
Kat 1	27	12	4	11	18	9
Fel	43	22	6	15	17	26
Övr. sv.	19	6	6	7	10	9
Ej sv.	24	16	0	8	7	17

Kat. 1: $z = 360° - v - u - w$.
Övr. sv. $90°$ och $60°$. Svaret $90°$ fås av $\frac{360}{4}$. Fallet då svaret är $60°$ följer av $z = 360° - 100° - 100° - 100°$.

5. En kvadrats area är $2.25 \ m^2$. Hur stor är dess sida?

	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	33	10	3	20	29	4
Kat 1	33	10	3	20	29	4
Fel	37	24	7	6	6	31
Övr. sv.	11	4	4	3	4	7
Ej sv.	26	20	3	3	2	24

Kat. 1: $1.5 \ m$, vilket följer direkt genom att dra roten ur arean.
Övr. sv. $\frac{2.25}{2} = 1.125 \ m$ och $\frac{2.25}{4} = 0.5625 \ m$ samt $2.25 \ m$. Möjliga felscenarion kan vara att eleverna uppfattar s^2 som $2 \cdot s$ eller att area och omkrets förväxlas.

6. Hur kan man avgöra om fyrhörningarna är likformiga?

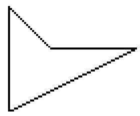
	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	14	3	1	10	14	0
Kat 1	14	3	1	10	14	0
Fel	56	31	9	16	21	35
Övr. sv.	18	9	4	5	9	9
Ej sv.	38	22	5	11	12	26

Kat. 1: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ och $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Övr. sv. $a + b = c + d$, genom att mäta arean, figurerna är likformiga om de är lika stora.

7. Rita en fyrhörning, där en av vinklarna saknar yttervinkel.

	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	5	2	0	3	5	0
Kat 1	5	2	0	3	5	0
Fel	65	32	10	23	30	35
Övr. sv.	19	6	7	6	12	7
Ej sv.	46	26	3	17	18	28

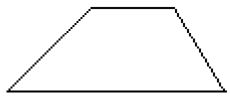
Kat. 1: Korrekt figur, exempelvis figuren nedan.



Övr. sv. Ej korrekta figurer, d.v.s. figurer ritade med yttervinkel.

8. Hur många diagonaler har följande fyrhörningar?

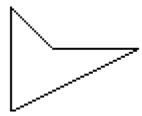
a)



	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	59	27	8	24	33	26
Kat 1	59	27	8	24	33	26
Fel	11	7	2	2	2	9
Övr. sv.	4	2	2	0	1	3
Ej sv.	7	5	0	2	1	6

Kat. 1: 2 stycken.
Övr. sv. 0, 4 och 6 stycken.

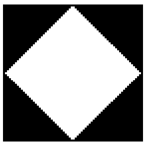
b)



	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	4	3	0	1	1	3
Kat 1	4	3	0	1	1	3
Fel	66	31	10	25	34	32
Kat 2	30	10	4	16	22	8
Övr. sv.	28	15	6	7	11	17
Ej sv.	8	6	0	2	1	7

Kat. 1: 2 stycken.
Kat. 2: 1 diagonal. Detta utgör ett logiskt svar, ty de svarande har enbart observerat diagonalen inuti figuren. Det finns dock en diagonal utanför också.
Övr. sv. 3, 4 och 0 stycken.

9. Beräkna arean av det skuggade området, då den inskrivna kvadraten har sidan $2.0 \ cm$.

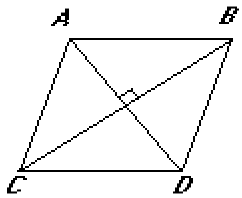


	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	27	13	2	12	17	10
Kat 1	27	13	2	12	17	10
Fel	43	21	8	14	18	25
Övr. sv.	20	11	1	8	11	9
Ej sv.	23	10	7	6	7	16

Kat. 1: $4 \ cm^2$. De lösningar vi har godkänt är $8-2\cdot 2=4$, 4 uträknat med trigonometri och $2\cdot 2=4$. I det första fallet beräknas, m.h.a. Pythagoras sats, den stora kvadratens sida till $2\cdot\sqrt{2} \ cm$, vilket ger att dess area blir $8 \ cm^2$. Vidare subtraheras nu den erhållna arean med den inskrivna kvadratens area, vilken är $4 \ cm^2$. I det trigonometriska fallet använder man sig av sinussatsen för att beräkna den stora kvadratens sida, därefter slutför man beräkningarna på samma sätt som i föregående fall. I sista fallet beräknas först den inskriva kvadratens area till $4 \ cm^2$, därefter dras slutsatsen att det skuggade området är lika stort som denna inskrivna area.

Övr. sv. 2 och $8 \ cm^2$. Svaret då arean beräknats till $2 \ cm^2$ följer av att den stora kvadratens sida har räknats ut till $2 \ cm$ och dess area följaktligen till $4 \ cm^2$. Därefter har man dividerat denna med 2, ty man vet att den inskrivna kvadratens area är lika stor som det skuggade områdets area. Svaret $8 \ cm^2$ följer av att den svarande har missupfattat frågan och istället för att beräkna det skuggade områdets area, beräknar den stora kvadratens area.

10. Beräkna omkretsen av nedanstående romb, då AD är $6.0 \ cm$ och BC är $8.0 \ cm$.



	Tot. (70)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	10	4	0	6	10	0
Kat 1	10	4	0	6	10	0
Fel	60	30	10	20	25	35
Övr. sv.	16	4	6	6	10	6
Ej sv.	44	26	4	14	15	29

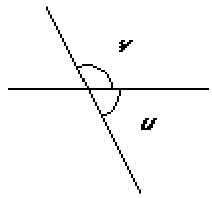
Kat. 1: $20 \ cm$. Man har tagit hjälp av Pythagoras sats och beräknat rombens sida till $5 \ cm$.
Övr. sv. $100 \ cm$, $10.56 \ cm$ och $24 \ cm$. Svaret $100 \ cm$ följer av att rombens sida räknats ut till $25 \ cm$ istället för $5 \ cm$. Alltså har man glömt dra roten ur 25. Svaret $10.56 \ cm$ fås av sambandet $2 \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{8}$. I fallet då svaret är $24 \ cm$ har rombens area, istället för dess omkrets, beräknats.

Vinklar

Detta test har 43 elever genomfört, varav 14 st. kommer från teoretiska program, 16 st. från yrkesförberedande program och 13 st. från komvux. I kolumnen T.P. har eleverna från komvux placerats. Av eleverna från yrkesförberedande program är fördelningen 11 st. från MP, 2 st. från IP och 3 st. från EC. Samtliga elever från teoretiska program läser på NV. Könsfördelningen hos de svarande är 15 pojkar, 5 flickor och 23 okända.

1. Vad kallas vinkelparet v och u?

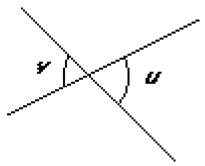
a)



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	20	6	4	10	15	5
Kat 1	18	5	4	9	13	5
Kat 2	2	1	0	1	2	0
Fel	23	9	1	13	12	11
Kat 3	4	1	0	3	4	0
Övr. sv.	5	3	0	2	0	5
Ej sv.	14	5	1	8	8	6

Kat. 1: Sidovinklar.
Kat. 2: Supplementvinklar.
Kat. 3: Komplementvinklar.
Övr. sv. Parallella vinklar, likbenta vinklar och spetsig/trubbig vinkel.

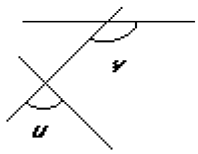
b)



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	19	6	4	9	14	5
Kat 1	12	5	4	3	7	5
Kat 2	7	1	0	6	7	0
Fel	24	9	1	14	13	11
Övr. sv.	8	3	0	5	5	3
Ej sv.	16	6	1	9	8	8

Kat. 1: Vertikalvinklar.
Kat. 2: Motstående vinklar. Detta svar har vi godkänt, eftersom vi tror att lärare ofta använder detta namn, vid sidan av vertikalvinklar. Vi har i alla fall upplevt detta under vår egen skoltid.
Övr. sv. Komplementvinklar, supplementvinklar, parallella vinklar.

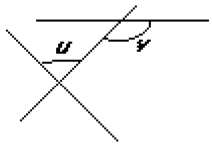
c)



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	1	1	0	0	1	0
Kat 1	1	1	0	0	1	0
Fel	42	14	5	23	26	16
Övr. sv.	9	4	1	4	7	2
Ej sv.	33	10	4	19	19	14

Kat. 1: Likbelägna vinklar.
Övr. sv. Alternatvinklar, supplementvinklar, yttervinkel.

d)



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	5	3	1	1	4	1
Kat 1	5	3	1	1	4	1
Fel	38	12	4	22	23	15
Övr. sv.	3	2	0	1	2	1
Ej sv.	35	10	4	21	21	14

Kat. 1: Alternatvinklar.
Övr. sv. Komplementvinkel och yttervinkel.

2. Vad kallas en vinkel som är $90°$?

	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	40	15	5	20	24	16
Kat 1	40	15	5	20	24	16
Fel	3	0	0	3	3	0
Kat 2	3	0	0	3	3	0

Kat. 1: Rät.
Kat. 2: Normal.

3. Vad är skillnaden mellan en spetsig och trubbig vinkel?

	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	30	12	4	14	18	12
Kat 1	30	12	4	14	18	12
Fel	13	3	1	9	9	4
Övr. sv.	6	3	1	2	3	3
Ej sv.	7	0	0	7	6	1

Kat. 1: En spetsig vinkel är mindre än $90°$ och en trubbig vinkel är större än $90°$.
Övr. sv. Den svarande har angett att en spetsig vinkel är mindre än $90°$, men att en trubbig är större än $120°$. Någon har istället redogjort för spets- resp. trubbvinklig triangel.

4. Vad kallas en linje som delar en vinkel i två lika stora delar?

	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	26	7	5	14	18	8
Kat 1	26	7	5	14	18	8
Fel	17	8	0	9	9	8
Övr. sv.	5	2	0	3	5	0
Ej sv.	12	6	0	6	4	8

Kat. 1: Bisektris.
Övr. sv. Transversal och parallellogram.

5. Vad innebär det att en linje är normal till en annan?

	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	3	0	0	3	3	0
Kat 1	3	0	0	3	3	0
Fel	40	15	5	20	24	16
Övr. sv.	10	5	1	4	3	7
Ej sv.	30	10	4	16	21	9

Kat. 1: Att en linje är normal till en annan innebär att den skär en annan linje i rät vinkel.
Övr. sv. Parallella linjer, lika långa linjer och alternatvinklar.

6. m är sidovinkel till n. Hur stor är då $m+n$?

	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	23	7	3	13	19	4
Kat 1	23	7	3	13	19	4
Fel	20	8	2	10	8	12
Övr. sv.	7	3	1	3	3	4
Ej sv.	13	5	1	7	5	8

Kat. 1: $180°$.
Övr. sv. $90°$ och $360°$. Den svarande förstår inte begreppet sidovinkel, utan menar att två sidovinklar tillsammans bildar $90°$ resp. $360°$.

7. Förklara följande begrepp:

a) komplementvinkel.

	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	0	0	0	0	0	0
Kat 1	0	0	0	0	0	0
Fel	43	15	5	23	27	16
Övr. sv.	6	2	0	4	3	3
Ej sv.	37	13	5	19	24	13

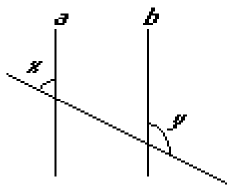
Kat. 1: En vinkel är komplementvinkel till en annan om de tillsammans bildar $90°$.
Övr. sv. $180°$, bisektris, trubbig.

b) supplementvinkel.

	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	3	1	1	1	3	0
Kat 1	3	1	1	1	3	0
Fel	40	14	4	22	24	16
Övr. sv.	3	2	0	1	1	2
Ej sv.	37	12	4	21	23	14

Kat. 1: En vinkel är supplementvinkel till en annan om de tillsammans bildar $180°$.
Övr. sv. Spetsig vinkel, motstående vinkel och hjälpvinkel.

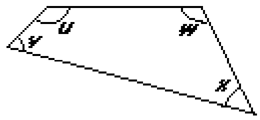
8. Linjerna a och b är parallella och vinkeln y är $125°$. Bestäm vinkeln x.



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	35	10	4	21	24	11
Kat 1	35	10	4	21	24	11
Fel	8	5	1	2	3	5
Övr. sv.	2	1	0	1	2	0
Ej sv.	6	4	1	1	1	5

Kat. 1: $55°$. Eftersom x och y är sidovinklar fås $x = 180° - 125° = 55°$.
Övr. sv. $180° - 125° = 65°$, alltså ett räknefel.

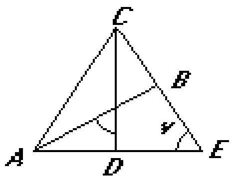
9. Beräkna vinkeln x, då vinklarna v, u och w är $75°$, $110°$ resp. $135°$.



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	32	12	2	18	21	11
Kat 1	32	12	2	18	21	11
Fel	11	3	3	5	6	5
Övr. sv.	3	0	0	3	3	0
Ej sv.	8	3	3	2	3	5

Kat. 1: $360° - 75° - 110° - 135° = 40°$.
Övr. sv. $50°$ och $320°$. Svaret $50°$ utgörs av ett räknefel, medan $320°$ fås genom $360° - 40° = 320°$.

10. I en likbent triangel ACE är CD en höjd, AB en bisektris och vinkeln v är $64°$. Bestäm den markerade vinkeln mellan höjden och bisektrisen.



	Tot. (43)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	16	6	1	9	11	5
Kat 1	16	6	1	9	11	5
Fel	27	9	4	14	16	11
Övr. sv.	13	4	2	7	11	2
Ej sv.	14	5	2	7	5	9

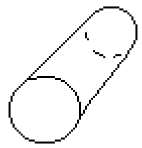
Kat. 1: Vinkeln v är $64°$ och triangeln likbent. Detta medför att vinkeln $CAE = 64°$. Bisektrisen delar denna vinkel i två lika delar, d.v.s. vinkeln $BAD = 32°$. Alltså fås den sökta vinkeln till $180° - 32° - 90° = 58°$.
Övr. sv. $50°$, $60°$, $26°$, $52°$, $45°$, $64°$. Samtliga svar har angivits utan redovisade lösningar, men i två av fallen tror vi oss funnit de svarandes tankegångar. Ett av svaren följer av att den svarande missuppfattar vilken vinkel vi söker och svarar att $CAE = 64°$. Konstaterandet i sig är korrekt, men alltså ej det svar vi söker. Svaret $26°$ är en konsekvens av att vinkeln BAE har bestämts till $64°$ och således har vår sökta vinkel beräknats till $180° - 90° - 64° = 26°$.

Rymdgeometri

Detta test har 59 elever genomfört, varav 38 st. kommer från teoretiska program och 21 st. från yrkesförberedande program. Av eleverna från yrkesförberedande program är fördelningen 2 st. från IP och 3 st. från EC, samt 16 st. från BP. Av eleverna från de teoretiska programmen läser 15 st. på NV, 20 st. på samhällsvetenskapligt program (SP) och 3 st. elever kommer från NVS. Könsfördelningen hos de svarande är 33 pojkar, 10 flickor och 16 okända.

1. Namnge följande figurer:

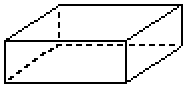
a)



	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	57	31	10	16	38	19
Kat 1	57	31	10	16	38	19
Fel	2	2	0	0	0	2
Kat 2	2	2	0	0	0	2

Kat. 1: Cylinder.
Kat. 2: Rör. Detta svar visar tydligt att elevens matematiska kännedom är svag. Eftersom eleven inte känner till den matematiskt riktiga termen väljs ett vardagligt ord som svar.

b)



	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	43	21	8	14	32	11
Kat 1	43	21	8	14	32	11
Fel	16	12	2	2	6	10
Övr. sv.	14	11	2	1	4	10
Ej sv.	2	1	0	1	2	0

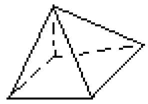
Kat. 1: Rätblock.
Övr. sv. Rektangel, låda, akvarium och kub. Rektangel och kub är matematiska begrepp som eleven missuppfattat, medan låda och akvarium är något som inte hör hemma bland de matematiska begreppen.

c)

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	57	31	10	16	38	19
Kat 1	57	31	10	16	38	19
Fel	2	2	0	0	0	2
Ej sv.	2	2	0	0	0	2

Kat. 1: Kon.

d)



	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	54	31	10	13	33	21
Kat 1	54	31	10	13	33	21
Fel	5	2	0	3	5	0
Övr. sv.	5	2	0	3	5	0

Kat. 1: Pyramid.
Övr. sv. Tetraeder och triangel.

2. Hur ser en regelbunden tetraeder ut? Kan man säga att den är en pyramid? Motivera.

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	4	1	1	2	4	0
Kat 1	4	1	1	2	4	0
Fel	55	32	9	14	34	21
Kat 2	6	5	0	1	4	2
Övr. sv.	6	4	0	2	4	2
Ej sv.	43	23	9	11	26	17

Kat. 1: Något i stil med vårt eget svar, vilket formulerats: En regelbunden tetraeder begränsas av fyra lika stora liksidiga trianglar. Man kan betrakta tetraedern som en pyramid, ty en pyramid består av en kropp som begränsas av ett slutet polygonområde (basytan) och ett antal triangelområden (sidoytor) som har en punkt (spetsen) gemensam. Någon har istället åskådliggjort detta med en fullständig figur.
Kat. 2: De svarande menar att en tetraeder består av trianglar, men det framgår ej hur många eller hur dessa är sammansatta.
Övr. sv. Att tetraedern ser ut som en pyramid. Några har även svarat med ofullständiga figurer.

3. Vilken rymdgeometrisk figur har volymen a^3?

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	20	8	5	7	18	2
Kat 1	20	8	5	7	18	2
Fel	39	25	5	9	20	19
Övr. sv.	13	6	4	3	9	4
Ej sv.	26	19	1	6	11	15

Kat. 1: Kub.
Övr. sv. Rätblock, kvadrat, kon, klot och triangel. Svaren är hämtade från den matematiska begreppsvärlden, men antagligen har man inte vetat det korrekta svaret och istället chansat.

4. Hur gör du för att beräkna volymen av:

a) en rak cirkulär cylinder?

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	47	23	8	16	33	14
Kat 1	47	23	8	16	33	14
Fel	12	10	2	0	5	7
Övr. sv.	5	3	2	0	3	2
Ej sv.	7	7	0	0	2	5

Kat. 1: $h \cdot p \cdot r^2$ eller höjden multiplicerat med basen.
Övr. sv. $p \cdot r^2$ och $2 \cdot h$.

b) ett klot?

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	14	10	2	2	8	6
Kat 1	14	10	2	2	8	6
Fel	45	23	8	14	30	15
Kat 2	13	3	3	7	13	0
Övr. sv.	12	7	2	3	8	4
Ej sv.	20	13	3	4	9	11

Kat. 1: $\frac{4p \cdot r^3}{3}$ eller samma sak förklarat med ord.

Kat. 2: $\frac{3p \cdot r^3}{4}$ och $\frac{4p \cdot r^2}{3}$. Formeln för att beräkna klotets volym måste anses vara en av de svåraste att komma ihåg. Dessa svar tyder på att eleven har bra grepp om formeln, men dock inte behärskar den fullt ut. I detta sammanhang ska också nämnas att det inte är nödvändigt att kunna alla formler för de geometriska figurerna utantill, eftersom de är lätta att slå upp vid behov.

Övr. sv. $4 \cdot p \cdot r^2$, $\frac{p \cdot r^4}{3}$, $3 \cdot p \cdot r^2$ och kubens halva volym. Observera att $4 \cdot p \cdot r^2$ uttrycker klotets begränsningsarea.

5. En kon begränsas av två ytor. Vad kallas dessa?

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	23	9	7	7	20	3
Kat 1	16	7	4	5	14	2
Kat 2	7	2	3	2	6	1
Fel	36	24	3	9	18	18
Övr. sv.	6	3	1	2	5	1
Ej sv.	30	21	2	7	13	17

De svar som vi ansett korrekta är: basytan och mantelytan.

Tabellen ska utläsas:

Av 23 st. svarande som nämnt minst en korrekt yta har 16 st. nämnt en yta och 7 st. har nämnt 2 ytor. Svarsfrekvensen på de nämnda ytorna är 15 st. på basytan och 15 st. på mantelytan.

Kat. 1: En yta rätt.
Kat. 2: Två ytor rätt.
Övr. sv. Skal, begränsningsarea, botten och cirkel.

6. Förklara vad klotets storcirkel är för någonting?

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	12	10	2	0	8	4
Kat 1	12	10	2	0	8	4
Fel	47	23	8	16	30	17
Övr. sv.	14	5	3	6	11	3
Ej sv.	33	18	5	10	19	14

Kat. 1: Klotets största möjliga omkrets alternativt största cirkeln som går att rita in i ett klot.
Övr. sv. Begränsningsytor, bottens area, klotets centrum och klotets diameter.

7. Hur många:

a) hörn finns i ett rätblock?

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	44	23	7	14	31	13
Kat 1	44	23	7	14	31	13
Fel	15	10	3	2	7	8
Övr. sv.	12	7	3	2	7	5
Ej sv.	3	3	0	0	0	3

Kat. 1: 8 stycken.
Övr. sv. 4, 12 och 24 stycken.

b) kanter finns i ett rätblock?

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	16	9	2	5	10	6
Kat 1	16	9	2	5	10	6
Fel	43	24	8	11	28	15
Övr. sv.	39	21	7	11	27	12
Ej sv.	4	3	1	0	1	3

Kat. 1: 12 stycken.
Övr. sv. 4, 6, 8 och 10 stycken.

8. En rak cirkulär kon har radien $2.0 \ \ cm$ och höjden $6.0 \ \ cm$. Sätt $p = 3.0$ och beräkna konens volym.

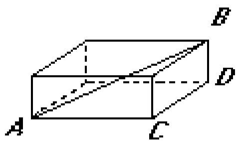
	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	14	6	6	2	12	2
Kat 1	14	6	6	2	12	2
Fel	45	27	4	14	26	19
Kat 2	16	9	1	6	12	4
Övr. sv.	4	2	0	2	4	0
Ej sv.	25	16	3	6	10	15

Kat. 1: Konens volym är $\frac{p \cdot h \cdot r^2}{3} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2^2}{3} = 24 \ \ cm^3$.

Kat. 2: $\frac{3 \cdot 6 \cdot 2^2}{2} = 36 \ \ cm^3$.

Övr. sv. $p \cdot r^2 = 12 \ \ cm^3$ och $\frac{4 \cdot p \cdot r^3}{3} = 96 \ \ cm^3$.

9. Beräkna rymddiagonalen AB i ett rätblock där sträckorna AC, CD och BD är $4.0 \ \ cm$, $3.0 \ \ cm$ resp. $2.0 \ \ cm$.



	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	6	4	1	1	6	0
Kat 1	1	1	0	0	1	0
Kat 2	5	3	1	1	5	0
Fel	53	29	9	15	32	21
Övr. sv.	10	5	3	2	8	2
Ej sv.	43	24	6	13	24	19

Kat. 1: $\sqrt{\left(\sqrt{3^2 + 4^2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{29} \ \ cm$, d.v.s. Pythagoras sats har tillämpats två gånger.

Kat. 2: $5.39 \ \ cm$ uträknat m.h.a. miniräknare.

Övr. sv. $2 + \sqrt{4^2 + 3^2} = 7$, $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = 144$ och $\sqrt{3^2 + 2^2} + \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{33}$. I första fallet följer felet av att de svarande endast använt Pythagoras sats en gång. I andra fallet beräknas den sökta rymddiagonalen genom att Pythagoras sats används direkt på de tre sidorna. Att detta är ett korrekt tankesätt inses genom att studera uttrycket i kategori 1. De svarande har dock inte lyckats med uträkningen, utan har gjort ett räknefel. I tredje fallet utnyttjas Pythagoras sats, men på ett felaktigt sätt.

10. En rak cirkulär cylinder har radien $2.0 \ cm$ och längden $12.0 \ cm$. Sätt $p = 3.0$ och beräkna:

a) cylinderns volym.

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	34	18	7	9	27	7
Kat 1	34	18	7	9	27	7
Fel	25	15	3	7	11	14
Övr. sv.	5	1	1	3	4	1
Ej sv.	20	14	2	4	7	13

Kat. 1: $p \cdot l \cdot r^2 = 3 \cdot 12 \cdot 2^2 = 144 \ cm^3$.
Övr. sv. $p \cdot l \cdot r$, $r \cdot l$ och $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 12 = 18 \cdot 12 = 216 \ cm^3$. Det senare är ett räknefel.

b) cylinderns totala begränsningsarea.

	Tot. (59)	P	F	O	T. P.	Y. P.
Rätt	7	5	1	1	7	0
Kat 1	7	5	1	1	7	0
Fel	52	28	9	15	31	21
Kat 2	7	4	1	2	5	2
Övr. sv.	7	2	1	4	5	2
Ej sv.	38	22	7	9	21	17

Kat. 1: $2 \cdot p \cdot r^2 + 2 \cdot p \cdot r \cdot l = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 12 = 168 \ cm^2$.
Kat. 2: $144 \ cm^2$. De svarande har beräknat volymen istället för begränsningsarean.
Övr. sv. $12 \cdot 2 = 24 \ cm^2$, d.v.s. enbart adderat cirklarnas begränsningsareor och
$r \cdot d \cdot l = 2 \cdot 4 \cdot 12 = 96 \ cm^2$.

Allmän del

Testet genomfördes sammanlagt av 29 elever. Av dessa lämnade 16 st. blankt och resultatet var över lag mycket svagt.

Mer än hälften av testen lämnades alltså in utan svar och endast ett fåtal svar kunde anses korrekta. Därför har vi valt att redovisa resultatet i form av att ge exempel på svar som förekom, både korrekta och felaktiga. För tydlighetens skull har vi upprepat frågorna som fanns med i testet. Efter varje fråga finns korta kommentarer till svaren.

11. Vad är en definition? Ge ett exempel.

Korrekta svar:
- En beskrivning.
- En förklaring av någonting.

Felaktiga svar:
- Värdemängd.
- En definition är en punkt.

Kommentar:
Svaren, att en definition är *en beskrivning* eller *förklaring av någonting*, har vi godkänt. Vi menar att dessa elever har en tillräckligt bra uppfattning om vad som menas med en definition. Bakom de felaktiga svaren tycker vi inte att det kan skönjas någon vidare förståelse, antagligen är dessa svar rena chansningar.

12. Vad är en sats? Ge ett exempel.

Korrekta svar:
- En formel, t.ex. Pythagoras sats.
- Det är något som gäller.

Felaktiga svar:
- Ett räknesätt.
- En mening. Det finns huvudsatser och bisatser.

Kommentar:
Denna fråga var den som flest klarade. Det populäraste svaret *var Pythagoras sats*, vilket vi tror beror på att detta är den mest använda satsen under gymnasietiden. Svaret att en sats skulle vara *ett räknesätt* förmodar vi kommer av att den svarande tror att en formel är ett slags räknesätt, d.v.s. ett sätt att räkna ut saker på. Någon har också förväxlat matematiken med svenskan och funderat över huvudsatser och bisatser.

13. Vad är ett bevis? Ge ett exempel.

Korrekta svar:
- Då man bevisar något på ett allmänt sätt.
- Pythagoras sats kan bevisas m.h.a. geometriska figurer.

Felaktiga svar:
- Svaret på matteproblemet.
- Då man genom ett räkneexempel visar att formeln eller teorin stämmer.

Kommentar:
Svaret, *då man bevisar något på ett allmänt sätt*, tycker vi är bra. Ofta vet man att en formel fungerar i ett fall eller i några enstaka fall, men inte om den fungerar generellt. Vanligtvis är det enklare att visa att en formel fungerar i ett specifikt fall, än att den alltid fungerar. De felaktiga svaren tyder på att eleverna har svårt att se vad som är ett bevis. Man menar helt enkelt att svaret på uträkningen, till en uppgift, utgör ett bevis.

14. Visa att $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}=5$.

Korrekta svar:
- $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}=2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3-\sqrt{24}=5+2\cdot\sqrt{6}-\sqrt{24}=5\Leftrightarrow 5=5\Leftrightarrow 0=0$.
- Utvecklar först: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3=5+2\cdot\sqrt{6}$. Sätter sedan in i formeln och får $5+2\cdot\sqrt{6}-\sqrt{24}=5\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{6}-\sqrt{24}=0\Rightarrow 0=0$.

Felaktiga svar:
- $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}=5\Leftrightarrow 9.898979-4.898979=5$.
- $(1.41+1.73)^2-4.9=5\Leftrightarrow 9.9-4.9=5\Leftrightarrow 5=5\Leftrightarrow 0=0$.

Kommentar:
De korrekta svaren är nästintill identiska med vårt eget svar. De felaktiga svaren knyter an till den tidigare diskussionen om elevernas svårigheter med att se vad som är ett bevis. Dessutom stärker dessa svar känslan av att elever tycker att det är bekvämt att använda miniräknare, vilket får till följd att man inte lär sig vissa väsentliga saker.

15. Vi påstår att 1=2. Och ger följande bevis:

sätt $a = b = 1$. Då gäller

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = ab \Leftrightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = b(a-b) \Leftrightarrow a+b = b \Leftrightarrow 1+1 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$$

Vårt påstående är bevisat.

Är detta ett bevis? Hur kan 2=1?

Svar:
Man kan inte dividera med $(a-b)$, ty denna term är $1-1=0$.

Kommentar:
Endast ett svar var inlämnat på denna fråga. Den svarande har hittat i vilket steg det sker en förbjuden räkneoperation. Dock har den svarande inte angivit varför detta är förbjudet, d.v.s. eftersom det då sker en division med noll.

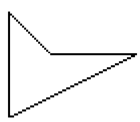
8.2 Svarsmallar

Trianglar/Cirklar

1. a) Liksidig triangel, b) Yttervinkel, supplementvinkel alternativt sidovinkel, c) $AB =$ diameter, $CD =$ korda, d) Cirkelsektor.
2. Den längsta sidan i en rätvinklig triangel kallas hypotenusa.
3. I en spetsvinklig triangel är alla tre vinklarna spetsiga och i en trubbvinklig triangel är en vinkel trubbig och de två övriga spetsiga.
4. Två sidor är lika långa, dess basvinklar är lika stora och höjden delar basen i två lika stora delar.
5. a) En höjd i en triangel är en sträcka mellan ett hörn och fotpunkten för normalen från hörnet till motstående sida eller denna sidas förlängning, b) En median i en triangel är en sträcka mellan ett hörn och motstående sidas mittpunkt, c) En bas i en triangel är motstående sida till ett hörn, varifrån motsvarande höjd utgår.
6. Beräkna omkretsen och dividera denna med diametern eller beräkna arean och dividera denna med radien i kvadrat.
7. a) En cirkelbåge är en sammanhängande del av cirkeln, b) Ett cirkelsegment är ett område som begränsas av en cirkelbåge och kordan mellan bågens ändpunkter, c) En tangent till en cirkel är en linje som går genom en punkt på cirkeln. Tangenten är vinkelrät mot radien till denna punkt.
8. Denna randvinkel är rät.
9. Enligt medelpunktsvinkelsatsen är en randvinkel i en cirkel hälften så stor som den medelpunktsvinkel som står på samma båge, d.v.s. $\frac{48}{2} = 24°$.
10. Cirkeln har arean: $p \cdot r^2 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48\ \ cm^2$. Höjden i den inskrivna liksidiga triangeln är enligt Pythagoras sats: $\sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}\ \ cm$, vilket ger att denna triangel har arean: $\frac{6}{2} \cdot \sqrt{27}\ \ cm^2$. Alltså blir arean av det skuggade området: $48 - 3 \cdot \sqrt{27} = 3(16 - \sqrt{27})\ \ cm^2$.

Fyrhörningar

1. a) Rektangel, b) Parallelltrapets.
2. I en parallelltrapets ska två sidor vara parallella. I ett parallellogram läggs ytterligare ett krav till, vilket är att även de övriga två sidorna ska vara parallella, d.v.s. sidorna ska vara parvis parallella.
3. Om man utgår från en parallellogram och lägger till kravet att samtliga vinklar i den ska vara räta fås rektangeln. Alltså kan rektangeln ses som en parallellogram.
4. Vinkelsumman i en parallellogram är $360°$, därav följer $z = 360° - v - u - w$.
5. Kvadratens sida är: $\sqrt{2.25} = 1.5\ \ m$.
6. Fyrhörningarna är likformiga om: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ eller $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.
7.



8. a) 2 stycken, b) 2 stycken.

9. Den omskrivna kvadraten har arean: $\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 8\ \ cm^2$, vilken lämpligen beräknas m.h.a. Pythagoras sats. Den inskrivna vita kvadraten har arean $4\ \ cm^2$. Således blir arean av det skuggade området: $8-4=4\ \ cm^2$.
10. Att diagonalerna är 8 resp. 6 cm medför, genom tillämpning av Pythagoras sats, att romben har sidan 5 cm. Alltså är rombens omkrets 20 cm.

Vinklar

1. a) Sidovinklar/supplementvinklar, b) Vertikalvinklar/motstående vinklar, c) Likbelägna vinklar, d) Alternatvinklar.
2. Rät vinkel.
3. En spetsig vinkel är mindre än $90°$, medan en trubbig vinkel är större än $90°$.
4. Bisektris.
5. Att en linje är normal till en annan innebär att den skär en annan linje i rät vinkel.
6. $180°$.
7. a) En vinkel kallas komplementvinkel till en annan om de tillsammans bildar $90°$, b) En vinkel kallas supplementvinkel till en annan om de tillsammans bildar $180°$.
8. Eftersom linjerna a och b är parallella kan vinklarna x och y ses som sidovinklar. Därav följer att $x = 180° - 125° = 55°$.
9. Vinkelsumman i en fyrhörning är $360°$. Detta tillsammans med att $v = 75°$, $u = 110°$ och $w = 135°$ ger $x = 360° - 75° - 110° - 135° = 40°$.
10. Eftersom triangeln är likbent är vinkeln $CAE = 64°$. Denna vinkel delas av en bisektris, vilket ger: $\frac{64}{2} = 32°$. Nu kan den markerade vinkeln räknas ut till: $180° - 90° - 32° = 58°$.

Rymdgeometri

1. a) Cylinder, b) Rätblock, c) Kon, d) Pyramid.
2. En regelbunden tetraeder begränsas av fyra lika stora liksidiga trianglar. Man kan betrakta tetraedern som en pyramid, ty en pyramid består av en kropp som begränsas av ett slutet polygonområde (basytan) och ett antal triangelområden (sidoytor) som har en punkt (spetsen) gemensam. Alltså kan tetraedern ses som en pyramid.
3. Kuben.
4. a) Basen multiplicerat med höjden, där basen är $p\cdot r^2$, b) $\frac{4\cdot p\cdot r^3}{3}$.
5. Basyta och mantelyta.
6. Ett plan genom medelpunkten till en klotyta skär denna utefter en cirkel, vilken kallas storcirkel.
7. a) 8 hörn, b) 12 kanter.
8. Konens volym är: $\frac{p\cdot h\cdot r^2}{3} = \frac{3\cdot 6\cdot 2^2}{3} = 24\ \ cm^3$.
9. $\sqrt{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$, d.v.s. Pythagoras sats två gånger.
10. a) Volymen blir: $p\cdot l\cdot r^2 = 3\cdot 12\cdot 2^2 = 144\ \ cm^3$, b) Mantelytans area är $2\cdot p\cdot l\cdot r = 2\cdot 3\cdot 12\cdot 2 = 144\ \ cm^3$ och en cirkelytas area är $p\cdot r^2 = 3\cdot 2^2 = 12\ \ cm^2$. Alltså är cylinderns totala begränsningsarea: $144+12+12=168\ \ cm^2$.

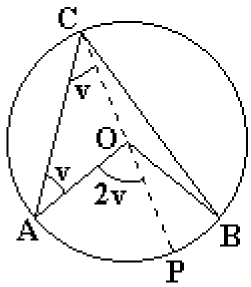
Allmän del

11. En definition innebär en begreppsbestämning, ett angivande av ett uttrycks betydelse. Exempelvis kan man definiera en randvinkel. Om man från en punkt på cirkelns rand drar två kordor, d.v.s. linjer som förbinder två punkter på randen, får man en randvinkel.

12. En sats är en utsaga som är vetenskapligt giltig. Utsagan är sammankopplad med den matematiska teorins axiomsystem genom ett bevis. Exempel på en sats är randvinkelsatsen som säger att en randvinkel i en cirkel är hälften så stor som den medelpunktsvinkel som står på samma båge.

13. Ett bevis är en kedja av logiska slutledningar som utgående från vissa utsagor, axiom, leder fram till en utsaga, sats. I beviset är det också tillåtet att använda sig av tidigare bevisade satser. Ett bevis fastställer ett påståendes eller antagandes sanning. Påståendet får inte strida mot de formella förutsättningarna eller vara självmotsägande. Exempelvis kan man bevisa randvinkelsatsen, vilket vi gjort nedan.[12]

Bevis: Vi väljer att placera medelpunkten O mellan randvinkelns ben. Beviset blir likartat även om man inte väljer så. Triangeln AOC är likbent eftersom OA och OC är radier i samma cirkel. Då är basvinklarna i triangeln lika stora, i figuren betecknade med v. Yttervinkeln AOP till den likbenta triangeln blir då $2v$. På samma sätt visar man att vinkeln BOP är dubbelt så stor som vinkeln BCP. Därmed är det klart att medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor som randvinkeln eller omvänt, randvinkeln är hälften så stor som medelpunktsvinkeln.



14. Bevis för att: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}=5$.

Vi utvecklar vänsterledet:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{24}=2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3-\sqrt{24}=$$
$$=5+\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{24}=5+\sqrt{24}-\sqrt{24}=5.$$

Vänsterledet = Högerledet, påståendet är bevisat!

[12] Björup, Kjell, *Delta kurs B*, sid. 55.

15. Nej, detta är inget bevis. Även den som inte är förtrogen med den matematiska världen inser att $1 \neq 2$. Felet beror på att en otillåten räkneoperation är utförd. I uppgiften hade vi:

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = ab \Leftrightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \Leftrightarrow (a+b)\underline{(a-b)} = b\underline{(a-b)} \Leftrightarrow 1+1 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1.$$

Antagandet $a = b = 1$ gör att man inte kan dividera bort parentesen som innehåller $(a-b)$, eftersom den blir noll.

Eftersom $a = b = 1$ utför vi, för att tydliggöra ovanstående, beräkningar där vi ersatt *a* med 1 och *b* med 1:

$$1 = 1 \Leftrightarrow 1^2 = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow 1^2 - 1^2 = 1 \cdot 1 - 1^2 \Leftrightarrow (1+1)\underline{(1-1)} = 1 \cdot \underline{(1-1)} \Leftrightarrow 1+1 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1.$$

8.3 Kursplan – SKOLFS 2000:5

Matematik A

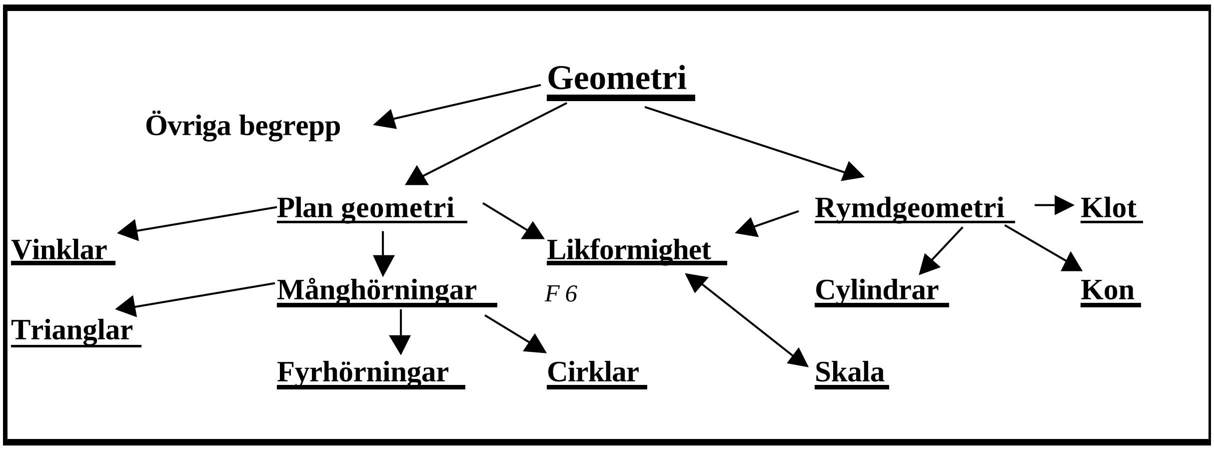
Ha fördjupat kunskaperna om geometriska begrepp och kunna tillämpa dem i vardagssituationer och i studieinriktningens övriga ämnen.

Vara så förtrogen med grundläggande geometriska satser och resonemang att hon eller han förstår och kan använda begreppen och tankegångarna vid problemlösning.

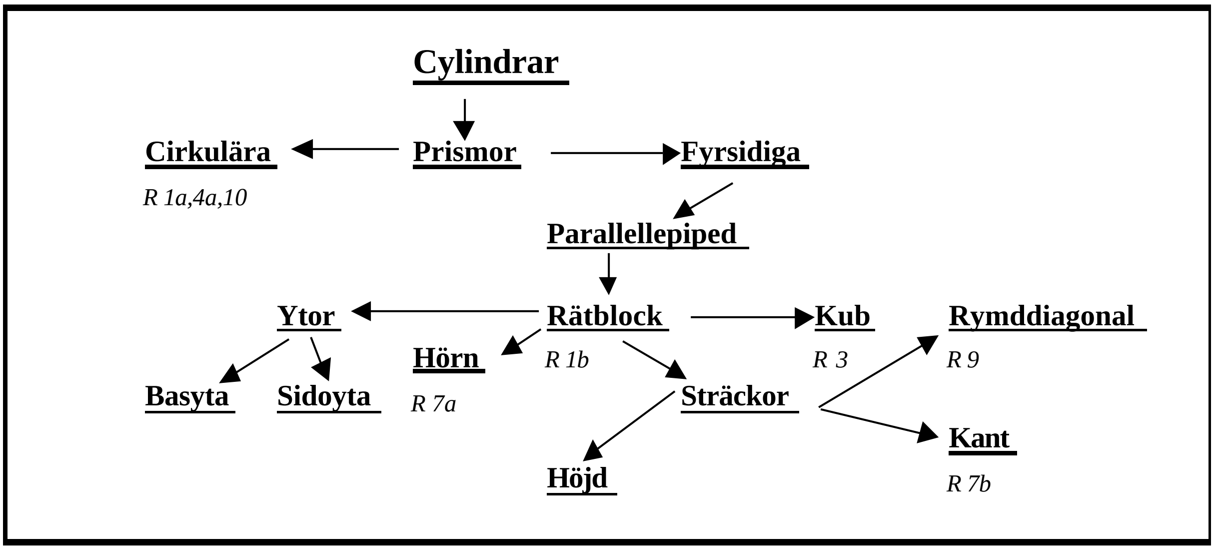
Matematik B

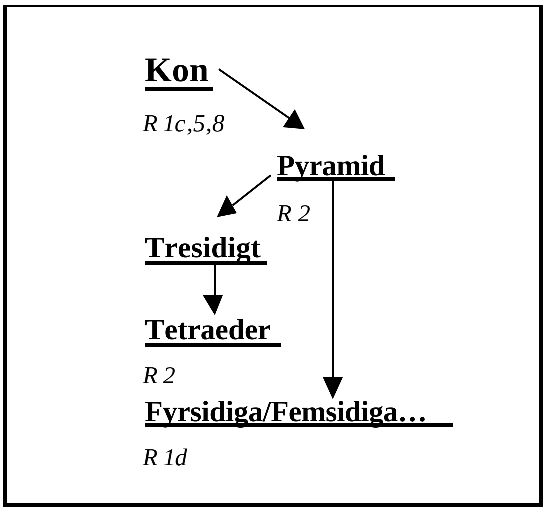
Kunna förklara, bevisa och vid problemlösning använda några viktiga satser från klassisk geometri.

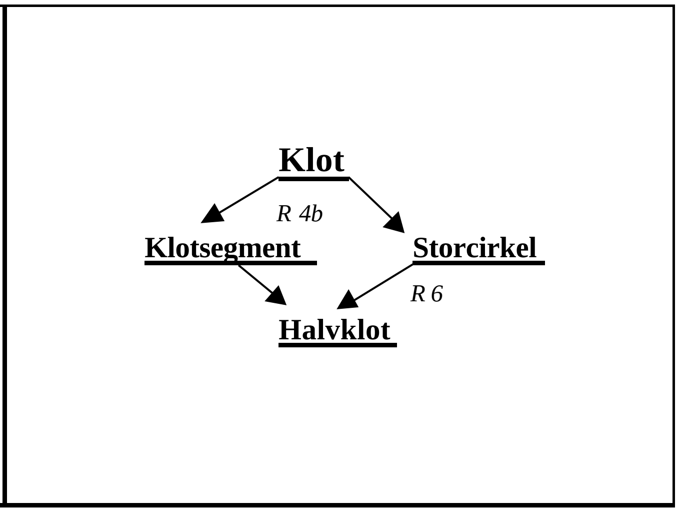
8.4 Begreppskartor inom geometri



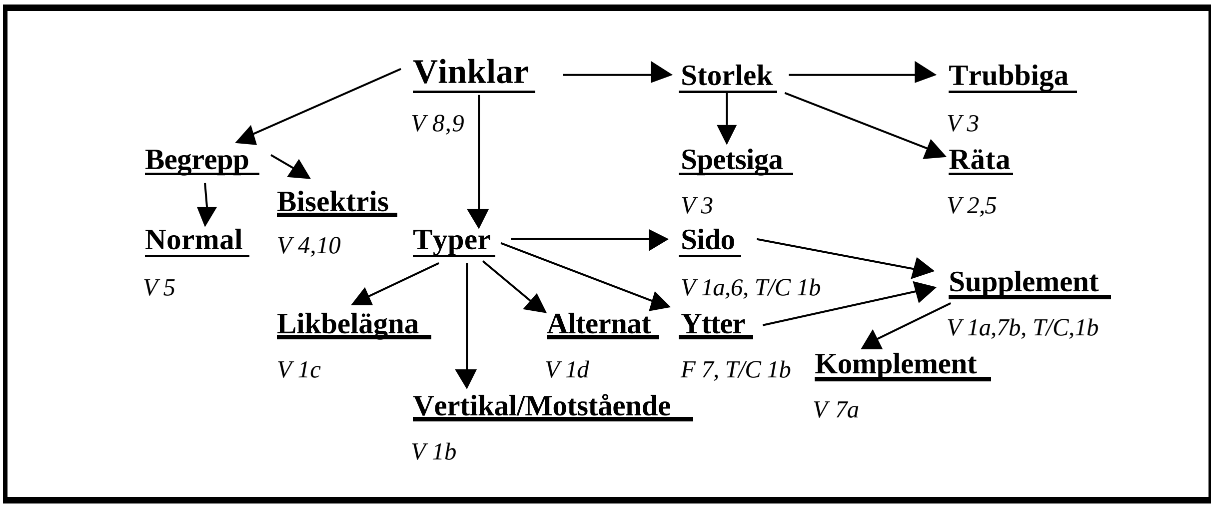
Rymd geometri

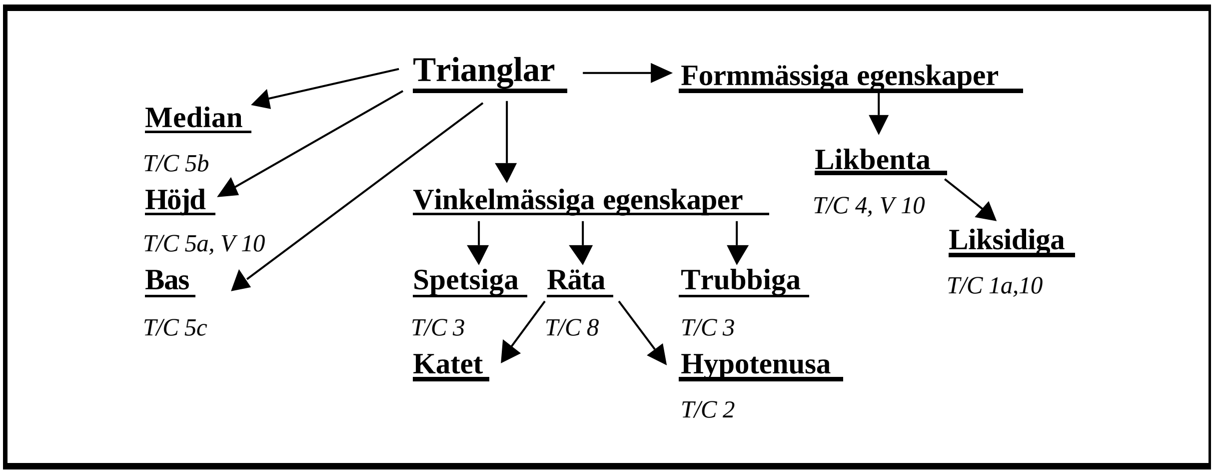


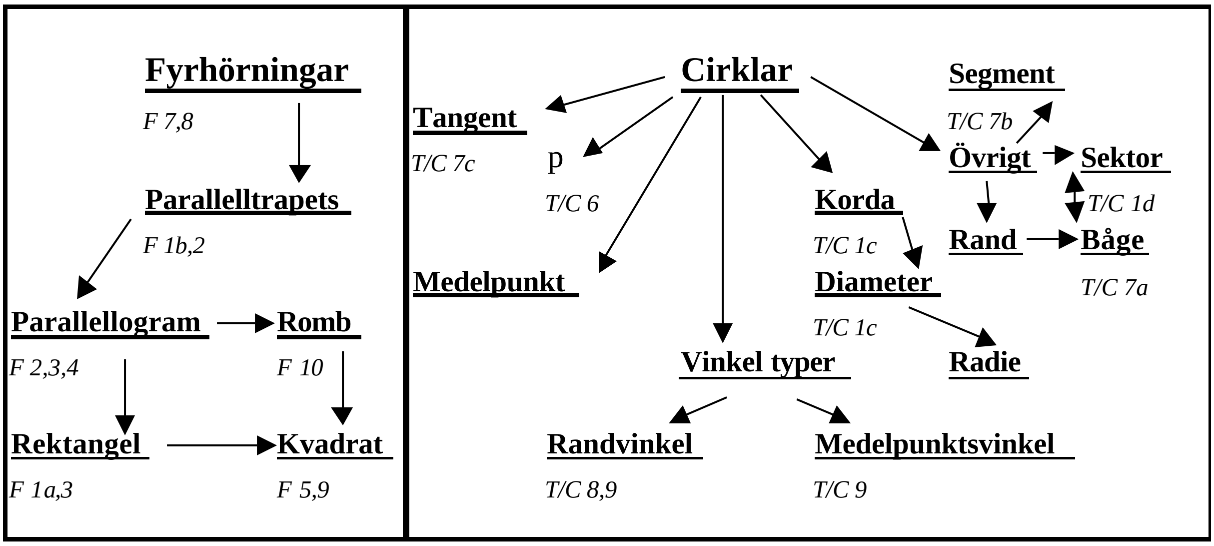




Plan geometri







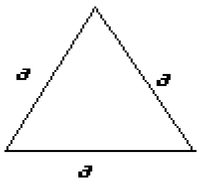
Elevens namn:_______________________________
Gymnasieprogram:___________________________
Lästa kurser i matematik:______________________
Senaste betyg i matematik:_____________________

Trianglar/Cirklar

Namnge

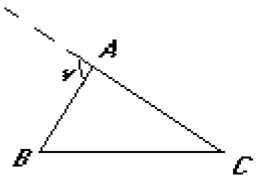
1. Namnge:

a) vad kallas triangeln?



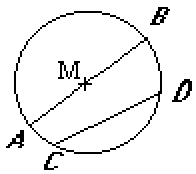
Svar:_____________________

b) vad kallas vinkeln v till vinkeln BAC i triangeln?



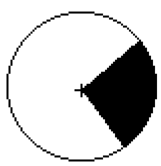
Svar:_____________________

c) M är cirkelns medelpunkt. Vad kallas AB och CD?



Svar:_____________________

d) hur benämns det skuggade området?



Svar:_____________________

Egenskaper

2. Vad är en hypotenusa?

Svar:____

3. Förklara skillnaden mellan en spetsvinklig och en trubbvinklig triangel.

Svar:____

____

4. Nämn minst en egenskap hos den likbenta triangeln?

Svar:____

____

5. Förklara följande begrepp:

a) en höjd i en triangel.

Svar:____

b) en median i en triangel.

Svar:____

c) en bas i en triangel.

Svar:____

6. Hur kan man med hjälp av ett cirkelformat föremål beräkna ett värde på p ?

Svar:____

7. Förklara följande begrepp:

a) cirkelbåge.

Svar:____

b) cirkelsegment.

Svar:____

c) tangent till en cirkel.

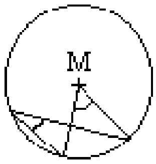
Svar:____

8. Vad kan sägas om randvinkeln, då dess vinkelben står på ändpunkterna till diametern i en cirkel?

Svar:____
____

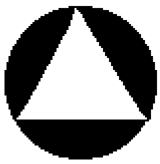
<u>**Problemlösning**</u>

9. M är cirkelns medelpunkt. Bestäm den markerade randvinkeln om medelpunktsvinkeln är $48°$.



Svar:

10. En liksidig triangel är inskriven i en cirkel, d.v.s. dess hörn ligger på randen till cirkeln. Sätt $p = 3.0$ Beräkna arean av det skuggade området, då cirkelns diameter är $8.0 \; cm$ och då den liksidiga triangeln har sidan $6.0 \; cm$.



Svar:

Tack för din medverkan!

Elevens namn:______________________________
Gymnasieprogram:__________________________
Lästa kurser i matematik:____________________
Senaste betyg i matematik:___________________

Fyrhörningar

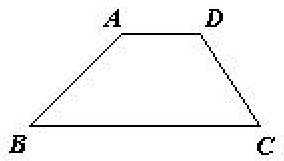
Namnge

1. Namnge följande fyrhörningar:

a)

Svar:____________________

b) AD och BC är parallella.



Svar:____________________

Egenskaper

2. Redogör för skillnaden mellan en parallellogram och en parallelltrapets.

Svar:____
____

3. Varför kan man säga att en rektangel är en parallellogram?

Svar:____
____

4. Du känner tre av vinklarna i en parallellogram. Kalla dem v, u och w. Hur stor är då den fjärde vinkeln z?

Svar:____
____

5. En kvadrats area är $2.25 \ m^2$ Hur stor är dess sida?

Svar:____
____

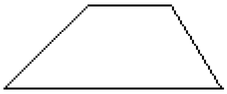
6. Hur kan man avgöra om fyrhörningarna är likformiga?

Svar:____
____

7. Rita en fyrhörning, där en av vinklarna saknar yttervinkel.

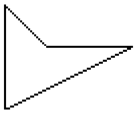
8. Hur många diagonaler har följande fyrhörningar?

a)



Svar:____________________

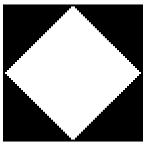
b)



Svar:____________________

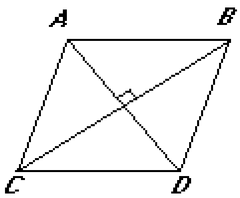
Problemlösning

9. Beräkna arean av det skuggade området, då den inskrivna kvadraten har sidan $2.0\ cm$.



Svar:

10. Beräkna omkretsen av nedanstående romb, då AD är $6.0\ cm$ och BC är $8.0\ cm$.



Svar:

Tack för din medverkan!

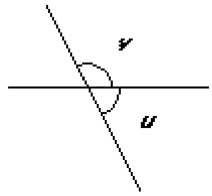
Elevens namn:______________________________
Gymnasieprogram:___________________________
Lästa kurser i matematik:_____________________
Senaste betyg i matematik:____________________

Vinklar

Namnge

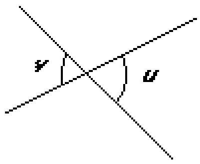
1. Vad kallas vinkelparet v och u?

a)



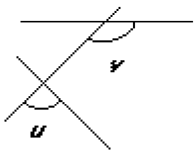
Svar:____________________

b)



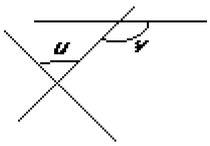
Svar:____________________

c)



Svar:____________________

d)



Svar:____________________

Egenskaper

2. Vad kallas en vinkel som är $90°$?

Svar:______________________

3. Vad är skillnaden mellan en spetsig och trubbig vinkel?

Svar:____
____

4. Vad kallas en linje som delar en vinkel i två lika stora delar?

Svar:______________________

5. Vad innebär det att en linje är normal till en annan?

Svar:____
____

6. m är sidovinkel till n. Hur stor är då $m+n$?

Svar:______________________

7. Förklara följande begrepp:

a) komplementvinkel.

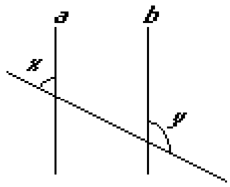
Svar:____

b) supplementvinkel.

Svar:____

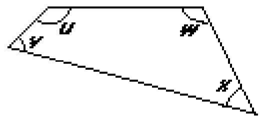
Problemlösning

8. Linjerna a och b är parallella och vinkeln y är $125°$. Bestäm vinkeln x.



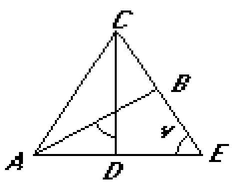
Svar:

9. Beräkna vinkeln x, då vinklarna v, u och w är $75°$, $110°$ resp. $135°$.



Svar:

10. I en likbent triangel ACE är CD en höjd, AB en bisektris och vinkeln v är $64°$. Bestäm den markerade vinkeln mellan höjden och bisektrisen.



Svar:

Tack för din medverkan!

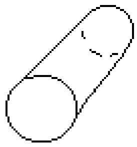
Elevens namn:______________________________
Gymnasieprogram:__________________________
Lästa kurser i matematik:_____________________
Senaste betyg i matematik:____________________

Rymdgeometri

Namnge

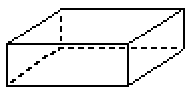
1. Namnge följande figurer:

a)



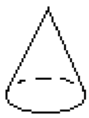
Svar:____________________

b)



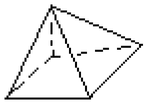
Svar:____________________

c)



Svar:____________________

d)



Svar:____________________

Egenskaper

2. Hur ser en regelbunden tetraeder ut? Kan man säga att den är en pyramid? Motivera.

Svar:____

____

3. Vilken rymdgeometrisk figur har volymen a^3 ?

Svar:____________________

4. Hur gör du för att beräkna volymen av:

a) en rak cirkulär cylinder?

Svar:____

____

b) ett klot?

Svar:____

____

5. En kon begränsas av två ytor. Vad kallas dessa?

Svar:____

6. Förklara vad klotets storcirkel är för någonting?

Svar:____

____

7. Hur många:

a) hörn finns i ett rätblock?

Svar:____________________

b) kanter finns i ett rätblock?

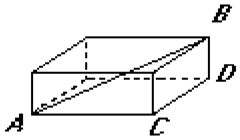
Svar:____________________

Problemlösning

8. En rak cirkulär kon har radien $2.0\ cm$ och höjden $6.0\ cm$. Sätt $p = 3.0$ och beräkna konens volym.

Svar:

9. Beräkna rymddiagonalen AB i ett rätblock där sträckorna AC, CD och BD är $4.0\ cm$, $3.0\ cm$ resp. $2.0\ cm$.



Svar:

10. En rak cirkulär cylinder har radien $2.0\ cm$ och längden $12.0\ cm$. Sätt $p = 3.0$ och beräkna:

a) cylinderns volym.

Svar:

b) cylinderns totala begränsningsarea.

Svar:

Tack för din medverkan!

Allmän del

11. Vad är en definition? Ge ett exempel.

12. Vad är en sats? Ge ett exempel.

13. Vad är ett bevis? Ge ett exempel.

14. Visa att $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{24}=5$.

15. Vi påstår att $1=2$. Och ger följande bevis:

sätt $a=b=1$. Då gäller

$$a=b \Leftrightarrow a^2=ab \Leftrightarrow a^2-b^2=ab-b^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)=b(a-b) \Leftrightarrow a+b=b \Leftrightarrow 1+1=1 \Leftrightarrow 2=1$$

Vårt påstående är bevisat.

Är detta ett bevis? Hur kan $2=1$?