School of Mathematics and Systems Engineering

Reports from MSI - Rapporter från MSI

Begreppet Derivata

Lars Axhage

Mars
2001

MSI
Växjö University
SE-351 95 VÄXJÖ

Report 01018
ISSN 1650-2647
ISRN VXU/MSI/MA/E/--01018/--

Växjö Universitet
MSI

BEGREPPET DERIVATA

Pierre de Fermat

Lars Axhage

Matematikeruppsats 10p
2001-03-05

Handledare:
Anders Tengstrand

If a man by methods not geometrical or demonstrative, shall have satisfied himself of the usefulness of certain rules; which he afterwards shall propose to his disciples for undoubted truths; which he undertakes to demonstrate in a subtle manner, and with the help of nice and intricate notations; it is not hard to conceive that such his disciples may, to save themselves the trouble of thinking, be inclined to confound the usefulness of a rule with the certainty of a truth, and accept the one for the other; especially if they are men accustomed rather to compute than to think; earnest rather to go on fast, than solicitous to set out warily and see their way distinctly.

George Berkley: *The analyst, or a discourse to an infidel mathematician*, 1734.

SAMMANFATTNING

Huvuddelen av uppsatsen behandlar derivatans historiska utveckling från ”de gamla grekerna” fram till dess att derivatan vilar på en solid grund år 1872. Upprinnelsen till ämnesvalet är att många gymnasieelever upplever att matematikens abstraktionsnivå tar ett ordentligt steg uppåt i och med införandet av derivatan, vilket leder till att man här ”förlorar” många elever. Läraren och läromedlen följer en gammal tradition som introducerar derivatan på ett, i mitt tycke, onödigt ”skrämmande” teoretiskt vis och eleven själv har inte överblick nog att inse varför matematiken plötsligt känns obegriplig utan riskerar att dra den olyckliga slutsatsen att han helt enkelt är för ”dum”. Då min övertygelse är att detta tragiska förhållande kan ändras med små medel vill jag med denna uppsats försöka göra en, om än liten, insats för att reformera matematikundervisningen i riktning mot ökad förståelse och minskad utslagning av elever.
Jag har även intervjuat tre elever i åk3 på Naturvetenskapsprogrammet på Ale Gymnasium om deras upplevelser av den undervisning i derivata de erhållit.
Slutligen sammanfattar jag, utan att försöka presentera detaljerade förslag, mina reflektioner kring matematikundervisning i allmänhet och derivata i synnerhet. Då jag nyligen fått reda på att samtliga elever på Naturvetenskapsprogrammet inte på lång när räcker till för att fylla de tillgängliga platserna på Högskolan har jag även tillåtit mig att reflektera även kring denna aspekt.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

INLEDNING

I grundskolans och gymnasiets matematikundervisning hävdas ibland att man vid speciellt två tillfällen "förlorar" många elever; det ena är när man inför variabler ("x" och "y"), det andra när man inför derivata. Även elever med det högsta betyget i matematik på gymnasiet är ofta påfallande osäkra på begreppet derivata trots att de behärskar uträkningarna väl. Att derivata är ett abstrakt och svårsmält begrepp visas inte minst av historien - det tog matematikerna omkring 2000 år att fullständigt reda ut och förankra detta begrepp. I detta arbete har jag valt ut fem matematiker vars matematik studeras mer detaljerat.

Idag vet jag att det går att få godkänt på en tentamen i analys utan att nödvändigtvis ha tillägnat sig den djupförståelse som man såväl behöver då man inför en gymnasieklass först måste motivera varför och sedan förklara derivata. Ett bra sätt att närma sig denna djupförståelse skulle kunna vara att studera matematikhistorien för att se hur och varför begreppet vuxit fram och vilka de svåraste hindren på vägen varit. En stor del av syftet med detta arbete är att försöka ge en lättillgänglig introduktion till området.

För att knyta frågeställningarna till verkligheten har jag intervjuat några elever om deras uppfattning om derivata samt den undervisning de erhållit inom området.

Jag har också försökt att reda ut vad orsakerna kan tänkas vara till att derivata av många anses så väldigt svårförståeligt samt slutligen komma med några idéer om hur undervisningen skulle kunna förändras för att göra begreppet derivata "mindre skrämmande".

DERIVATANS MATEMATIKER

REDAN DE GAMLA GREKERNA…

En av historiens allra mest geniala matematiker var Arkimedes (287-212 f.kr.). Den tid då Arkimedes och Appolonius (262-ca 190 f.kr.) verkade betraktas som antikens matematiska höjdpunkt. Arkimedes kunde bestämma tangenten till vissa kurvor. Dessutom beräknar han bl.a. sfärens volym genom att dela upp den i oändligt tunna skivor som sedan summeras. Även Appolonius studerade tangenter till bl.a. parablar, hyperblar och ellipser. Arkimedes använde ofta exhaustionsprincipen som verktyg i sina geometriska bevis. Den formulerades av Eudoxos (300-talet f.kr.) och finns i Euklides (300-talet f.kr.) Elementa nr. 10. Exhaustionsprincipen är, trots att den vid första påseendet närmast verkar trivial, oerhört användbar. Exhaustionsprincipen lyder på följande sätt: " Om två storheter är givna, och från den större subtraheras en storhet större än hälften, och från det som återstår subtraheras en storhet större än hälften, och om denna procedur upprepas, så erhålls slutligen en återstod som är mindre än den minsta av de båda givna storheterna." Man kan säga att exhaustionsprincipen innehåller samma ide som gränsvärdet. Det skulle ändå vara missvisande att påstå att Arkimedes skapade derivata och integral då han dels inte verkar ha förstått det inversa förhållandet mellan integral och derivata och dessutom fundamentala delar av den matematik som krävs för detta ännu ej var utvecklad. Bland annat saknade Arkimedes: nolla, irrationella tal, negativa tal, funktionsbegreppet, gränsvärde m.m. Att han trots dessa, ur vår tids synvinkel, svårartade handikapp kunde nå en rad banbrytande resultat placerar honom tveklöst som en av alla tiders största matematiker.

FRANCOIS VIÈTE (1540-1603)

Antikens och Medeltidens matematiker måste ha haft väldiga problem med att uttrycka sina matematiska tankar då de var tvungna att uttrycka sig i beskrivande verbal form. Viète är den som mest bidragit till utvecklingen av den symboliska algebran. Han var den förste som t.ex. skrev "*ax quadratus* + *bx* + *c* = 0" och med detta menade samtliga andragradsekvationer. De fördelar som det innebar för matematiken att få ett klart och koncist språk kan knappast överskattas. Viètes bidrag till utvecklingen av derivata är tveklöst betydande, om än indirekta.

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Descartes var en fransk filosof som vidareutvecklade Viètes symboliska algebra. En av hans stora insatser var att bryta med den gamla traditionen där x^2 alltid betecknade en area och x^3 alltid en volym. Descartes uppmärksammade växelverkan mellan algebran och geometrin i en skrift i vilken han visar att algebraiska ekvationer kan lösas geometriskt och att geometriska problem kan lösas algebraiskt. Man kan säga att Descartes är den förste matematiker vars originalmanuskript utan större svårigheter är direkt läsbara för dagens matematiker.
Vi svenskar har ett speciellt förhållande till Descartes med tanke på det, för en filosof, alldeles särskilt grymma öde han gick till mötes. Han blev kallad till Stockholm för att bli filosofisk samtalspartner och privatlärare åt drottning Kristina. En tjänst vid hovet verkade säkert mycket attraktiv för Descartes men vad han inte visste var att de filosofiska samtalen med drottningen skulle äga rum klockan fem varje morgonen i slottet Tre Kronors morgonkyliga gråstenssalar. Föga förvånande blev Descartes snart sjuk och dog efter några månader i lunginflammation.

PIERRE DE FERMAT (1601-1665)

Fermats matematiska begåvning och intresse måste ha varit extra ordinära med tanke på de banbrytande resultat han åstadkom utan att någonsin ha matematiken som profession. Fermat var utbildad jurist och arbetade som domare, vilket ger en förklaring till varför han som regel ej publicerade sina resultat. Inom analysen kan man mycket väl hävda att det var Fermat som först utvecklade derivata och integral. Detta synsätt skulle även erbjuda ett tilltalande slut på den sorgliga konflikten mellan Newton och Leibnitz, något som kanske Laplace hade i åtanke då han utnämnde Fermat till "den sanne uppfinnaren av differentialkalkylen".

ISAAC BARROW (1630-1677)

Barrow är inte känd i första hand för sina egna betydelsefulla bidrag till matematiken utan för att han var Newtons lärare. Faktum är han verkar ha inspirerat såväl Newton som Leibnitz till att utveckla integral- och differentialkalkylen. Leibnitz var nämligen i London 1673 och under denna resa köpte han "*Lectiones geometricae*" författade av Barrow. Leibnitz utvecklade differential- och integralkalkylen mellan 1673 och 1676. Han lär också ha hört talas om Newtons, då ännu ej publicerade, infinitesimalkalkyl under denna resa.

ISAAC NEWTON (1642-1727)

Newton anses av många vara historiens mest geniale vetenskapsman. Då man fördjupar sig i vetenskapshistorien finner man dock, i kontrast till "myten", att Newton såväl som Einstein, Arkimedes och andra av "de allra största" absolut inte har suttit ensamma i en kammare och hittat på nya geniala teorier utan, naturligtvis, mer att de har sammanställt och vidareutvecklat samtidens resultat i samarbete med likasinnade - på ett i och för sig enastående genialt vis. Bäst uttrycker Newton detta själv: "Om jag har nått högt beror det på att jag stått på jättars axlar".

Vad är det då i denna kedja av små framsteg som gör att just Newton (och Leibnitz) får äran av att ha utvecklat differential- och integralkalkylen. De grundläggande idéerna fanns ju redan under antiken? Svaret är att de utvecklade generella metoder som är tillämpliga på en mängd olika funktioner, samt att de var de första som klart insåg att derivata och integral är varandras motsatser. För Newton var det absolut nödvändigt att utveckla analysen för att kunna hantera de komplicerade problemställningar han mötte inom fysiken. Kanske var det hans stora intresse för fysik som gjorde att han inte publicerade sina resultat förrän 1687 trots att han utvecklat differential- och integralkalkylen redan 1666. Det förefaller något märkligt att en professor i matematik vid universitetet i Cambridge (från och med 1669) väntar i 20 år med att publicera revolutionerande resultat. Under prioritetsstriden med Leibnitz visar Newton med önskvärd tydlighet att prestigelöshet i varje fall inte är förklaringen.

GOTTFRID WILHELM LEIBNITZ (1646-1716)

Leibnitz var i grunden jurist men var även utbildad inom filosofi, teologi och matematik. Mest berömd var Leibnitz för sina insatser inom filosofin. Otvetydigt är det dock så att Leibnitz filosofiska rön ständigt har minskat i betydelse medan hans matematiska arbeten stadigt har uppvärderats. Medan Newton utgick från fysikens behov drevs Leibnitz av filosofiska motiv då han utvecklade sin infinitesimalkalkyl. Rent matematiskt var Leibnitz kalkyl likvärdig med Newtons men med den skillnaden att Leibnitz beteckningar var mer ändamålsenliga bl.a. härrör beteckningarna: *dy, dx, dy/dx*, $\int$, funktion och koordinat från Leibnitz.

Den olyckliga prioritetsstriden mellan Newton och Leibnitz var förstås närmast omöjlig att lösa; Newton utvecklade obestridligen sin kalkyl först medan Leibnitz var först med att publicera. Försöken att finna en lösning underlättades nog inte av att denna lilla tvist blåstes upp till att bli en prestigefråga mellan Englands och kontinentens hela matematikersamfund. Man lyckades faktiskt hålla denna konflikt aktuell under 100 år. Enligt dagens synsätt hade äran för upptäckten tveklöst gått till Leibnitz.

BROOK TAYLOR (1685-1731)

Taylor publicerar sin berömda formel 1715 i *Methodus incrementorum directa et inversa*. Taylors formel gör det möjligt att approximera en given funktion med ett polynom. Metoden är mycket användbar t.ex. för gränsvärdesberäkningar.

COLIN MACLAURIN (1698-1746)

Maclaurin utvecklade Taylors formel som behandlar ett specialfall, till en allmän formel i sitt arbete *Treatise on Fluxions* 1742.

LEONARD EULER (1707-1783)

Alla tiders mest produktiva matematiker var utan jämförelse Leonard Euler. Under de 60 år han var verksam producerade han i genomsnitt 800 sidor om året, vilket tillsammans beräknas bli omkring 75 band. Idag är Euler bl.a. känd för sambandet "$e^{ix} = \cos x + i\sin x$" (Eulers formel) samt för sina resultat inom området differentialekvationer. 1755 publicerade Euler "*Institutiones calculi differentialis*" och något senare "*Institutiones calculi integralis*" i tre band. I dessa verk presenterade Euler den i särklass mest genomarbetade och omfattande framställningen dittills inom analysen. Euler var även, liksom Leibnitz, skicklig på att skapa lämpliga beteckningar inom den symboliska algebran t ex: π, e, Σ, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $f(x)$ m.m. Genom att flytta fokus från kurvor till funktioner som det centrala matematiska begreppet samt genom införandet av potensserier inledde Leonard Euler den process som brukar benämnas "analysens aritmetisering".

JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813)

Lagrange var, jämte Euler, 1700-talets störste matematiker. Han var den förste som helt frigjorde sig från geometrin och påpekar faktiskt i förtalet till ett av sina mest betydande verk att boken inte innehåller ett enda diagram. Detta är ett mycket stort steg jämfört t.ex. med Newton som ju återförde alla sina bevis på den euklidiska geometrin. Lagrange införde en rent algebraisk definition på derivatan som en serieutveckling (med gemensamma drag med Taylors formel). Denna definition förde dock med sig nya problem varför den aldrig riktigt slog igenom. Även själva ordet derivata har introducerats av Lagrange.

BERNARD BOLZANO (1781-1848)

Bolzano var en genialisk matematiker, ofta före sin tid, men med den egenheten att han alltför ofta publicerade rena felaktigheter. Han insåg till fullo att matematiska begrepp måste ges klara och entydiga definitioner. Bolzano intresserade sig bl.a. för att ge infinitesimalkalkylen en stabil grund att stå på och gav 1817 den första definitionen på kontinuerlig funktion. Sannolikt som en följd av Bolzanos svaga ställning inom matematikersamfundet, användes istället en mindre stringent definition av Cauchy som publicerades 1821. Bolzano säger i samma arbete att derivatan

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

d.v.s. "derivatan är den kvantitet som kvoten närmar sig obegränsat, när Δx närmar sig noll genom positiva och negativa termer". Bolzano var också den förste som insåg skillnaden mellan kontinuitet och deriverbarhet och gav även ett exempel på en kontinuerlig funktion som saknade derivata i varje punkt. Kanske på grund av sin ojämna kvalitet var det inte många av sina upptäckter som Bolzano fick ära och uppskattning för.

AUGUSTIN CAUCHY (1789-1857)

Cauchy var en mycket produktiv matematiker som publicerade mer än 500 arbeten. Han var en av de första som uttalade kravet på stringens i bevisföringen. 1821-1829 publicerade Cauchy "*Cours d'analyse*" en lärobok i differential och integralkalkyl i tre delar. I detta arbete gav Cauchy nya definitioner för samtliga grundläggande begrepp inom analysen, bl.a: gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet och integral. Han definierade också de irrationella talen med hjälp av talföljder (s.k. Cauchy-följder). Cauchy når inte riktigt upp till sin egen målsättning med stringenta definitioner på alla begrepp. Flera av hans definitioner innehåller vissa svagheter. Dessa frågetecken rätades dock senare ut av främst Karl Weierstrass.

PETER DIRICHLET (1805-1859)

Efterträdde Gauss som professor i Göttingen 1855. Dirichlet introducerade den definition av funktionsbegreppet som används än idag.

KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

Weierstrass anses vara en av 1800-talets allra största matematiker. Han publicerade inte mycket men utövade som professor i Berlin ett stort inflytande över fullbordandet av analysens aritmetisering. Weierstrass var fullt klar över att en fast grund för analysen förutsatte en klar definition av de reella talen.

RICHARD DEDEKIND (1831-1916)

Dedekind definierade irrationella tal 1872, en definition som kallas Dedekinds snitt och egentligen är en vidareutveckling av Eudoxos definition av proportionalitet för inkommensurabla storheter. Dedekind formulerade sig så här: "Jag finner kontinuitetens innersta väsen i följande princip: Om alla punkter på den räta linjen tillhör två klasser, sådana att varje punkt i den första klassen ligger till vänster om varje punkt i den andra klassen, så existerar en och endast en punkt som frambringar denna delning av linjen i två delar."
Det är denna delning av linjen i två delar som Dedekind kallar ett snitt.

GEORG CANTOR (1845-1918)

Cantor definierade irrationella tal på ett annat sätt samma år (1872) med hjälp av fundamentalföljder (kallas ibland även Cauchyföljder). Såväl Cantors som Dedekinds definitioner av de reella talen ger upphov till en fullständig kropp och det kan visas att dessa är isomorfa, d.v.s. djupast sett är de båda definitionerna ekvivalenta.

ANALYSENS ARITMETISERING

Den nödvändiga frigörelsen av analysen från geometrin krävde nya stringenta definitioner på samtliga ingående begrepp. Denna process inleddes av Euler genom att fokusera på funktionen istället för den geometriska kurvan (grafen). Det visade sig vara omöjligt att skapa en fast grund för analysen utan att ha en stringent definition av de irrationella talen. Denna definition gavs alltså så sent som 1872, vilket idag kan verka förvånande med tanke på att greker och andra slitit med inkommensurabiliteten (d.v.s. det faktum att diagonalens längd ($\sqrt{2}$) i en kvadrat med sidan 1 inte kan anges som ett bråktal utan måste anges med oändligt många decimaler) sedan Hippasos dagar på 400-talet f.kr. (Hippasos var enligt traditionen den som först upptäckte inkommensurabeliteten. En följd av denna upptäckt var att pythagoréernas närmast religiösa tro på *den odelbara enheten* plötsligt blev meningslös. Då Hippasos offentliggjorde sina rön dömdes han till döden och avrättades.) Först då de reella talen var väldefinierade blev det alltså möjligt att stringent definiera kontinuitet, gränsvärde och därigenom derivata och integral.

HISTORISK MATEMATIK

Här följer några mer detaljerade matematiska exempel på derivatans utveckling, i kronologisk ordning: Fermat, Newton, Leibnitz, Cauchy och Weierstrass.

FERMAT

Det första kända problem där Fermat tillämpade derivata[1] är "dela en linje i två delar så att delarnas produkt blir maximal" (fig.1). Naturligtvis vet Fermat på förhand svaret på ett så enkelt problem. Det intressanta är att han här utvecklar en metod för derivering.

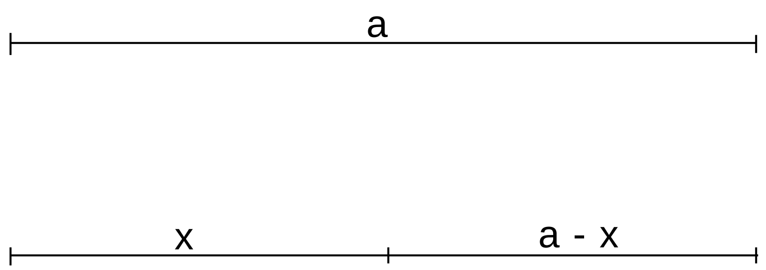

Fig.1.

Produkten $P = x(a - x)$. Här inför Fermat $x + e$ och anför att vid maximum är produkten densamma för x och $x + e$.

Då fick han ekvationen: $x(a - x) = (x + e)(a - x - e)$. Fermat förenklade den:

$$x(a - x) = (x + e)(a - x - e)$$

$$xa - x^2 = xa - x^2 - xe + ae - xe - e^2$$

$$e(a - 2x - e) = 0$$

$$a - 2x - e = 0$$

Nu låter Fermat $e = 0$, och får då $x = a / 2$, vilket ju är svaret vid maximum för P.

Menar Fermat verkligen att e är lika med 0? I så fall gör han sig skyldig till att dela med 0, vilket han nog inte avsåg. Han bör ha menat att e närmar sig 0 då P närmar sig maximum, alltså i princip ett gränsvärde. Han hade observerat att en kurva ändrar sig mycket litet nära maximum och minimum, vilket gör approximationen $e \approx 0$ nära maximum rimlig. För att kunna definiera gränsvärde krävs att man klart har definierat begreppen kontinuitet och

irrationella tal, en förutsättning som inte var uppnådd förrän drygt 200 år efter Fermat. Det verkar inte råda något tvivel om att Fermat har resonerat korrekt men saknade verktyg att klart uttrycka vad han egentligen menade. Fermats metod med sitt mystiska *e* framstår som lite av "hokuspokus" med detta framställningssätt. Fermats metod säger heller ingenting om ifall *a*/2 ger ett maximum eller minimum, men det är ju ett i sammanhanget mindre problem.
Med modern notation skulle ekvationen kunna uttryckas så här:

$$\lim_{e \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e} = 0$$

ett uttryck som känns välbekant.
Man kan även konstatera att $f(x) = x(a-x) = ax - x^2$ samt att $f'(x) = a - 2x$ och att $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$.

Med hjälp av sitt "mystiska" *e* utvecklade Fermat en generell metod för att konstruera tangenten till en punkt på en kurva (fig.2):

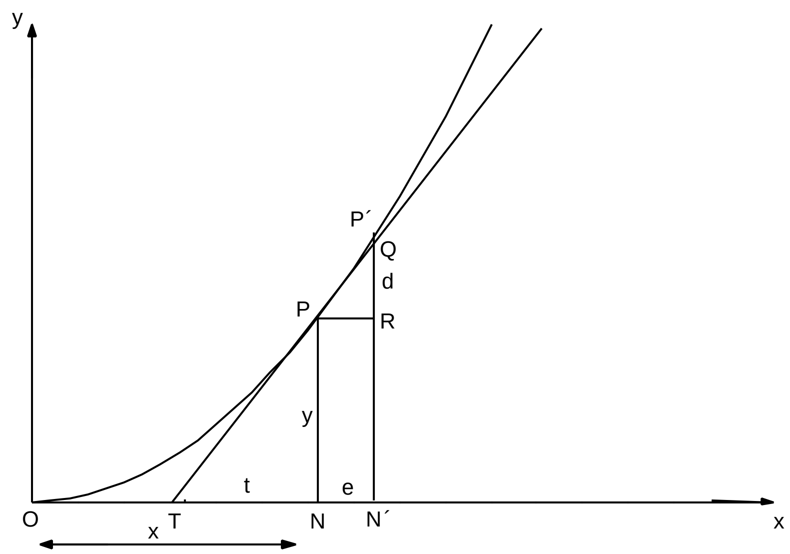

Fig. 2.

Fermats ide är att försöka bestämma sträckan *TN*, för om man känner *TN* kan naturligtvis tangenten enkelt konstrueras. Trianglarna *PQR* och *TPN* är likformiga vilket medför att *TP/PN = PR/QR. P´* väljs mycket nära *P* så att *P´R » QR.* Sedan sätter Fermat *TN = t, ON = x, PN = y, NN´= PR = e och P´R = d*. Nu kan man skriva: *t /y » e/d.*
I detta exempel är kurvan en parabel med ekvationen $y = x^n$, där *n* är ett heltal.
Koordinaterna för punkten *P´* kan nu skrivas *(x + e, y + d).*

Då gäller även: $y + d = (x + e)^n = x^n + nx^{n-1}e$ + e-termer med högre potential.

Eftersom $y = x^n$ kan vi förenkla uttrycket: $d / e = nx^{n-1}$ + e-termer med högre potential. Enligt föregående exempel sätter Fermat nu $e = 0$. Vi har även (likformiga trianglar) $t = ye / d$.

Tillsammans ger detta:

$$t = \frac{ye}{d} = \frac{x^n}{nx^{n-1}} = \frac{x}{n}$$

Kurvans lutning i punkten P definieras som y / t, kan nu skrivas $ny / x = nx^{n-1}$.

Med dagens notation kan vi nu skriva: $f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$.

Det är alltså inte på något sätt självklart att Newton och Leibnitz skall ha hela äran av att ha upptäckt begreppet derivata. De invändningar som nämnts mot Fermats metod gäller ju även i princip även för Newton och Leibnitz; inte heller de hade möjlighet att klart definiera gränsvärdet.

NEWTON

För Newton, som var en passionerad fysiker, var derivatan nog främst ett oumbärligt verktyg för att studera fysikaliska skeenden. Newton betraktade en rörlig punkt P på en kurva[7] som vi betecknar $f(x,y) = 0$. Punkten rörde sig i både x- och y-led. *P's* koordinater x och y, kallade Newton *fluenter*. Newton inför också de horisontella och vertikala hastigheterna $\dot{x}$ och $\dot{y}$, som han kallade *fluxioner*. Såväl fluenterna som fluxionerna är tidsberoende eftersom P är rörlig. Fluxionerna motsvarar derivatorna av x och y med avseende på t. Bokstaven o representerar ett mycket kort tidsintervall under vilket P rör sig $\dot{x} * 0$ och $\dot{y} * 0$

Likformighet ger att $s / y = \dot{x} * o / (\dot{y} * o) = \dot{x} / \dot{y}$, vilket medför att $s = y * \dot{x} / \dot{y}$.

Metoden är som synes mycket lik Fermats metod, vilket inte är förvånande: Newton har inspirerats av Barrow som i sin tur har inspirerats av Fermat.

Kurvan i figur 3 har ekvationen:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\,.$$

Låt oss bestämma $\dot{x} / \dot{y}$:

Då o är mycket litet antas $(x+\dot{x}*o, y+\dot{y}*o)$ ligga på kurvan.

Insättning av $x = x+\dot{x}*o$ och $y = y+\dot{y}*o$ ger:

$$y+\dot{y}*o = 1/4(x+\dot{x}*o)^2 + 1/4 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}*o = x*\dot{x}*o + (1/2)(\dot{x}*o)^2$$

Division med o ger:

$$\dot{y} = x*\dot{x} + (1/2)\,\dot{x}^2*o.$$

Termen (1/2) $\dot{x}^2*o$ betraktas som försumbar vilket medför att $\dot{x}/\dot{y} = 1/x$.

Slutligen får vi:

$$s = y*\dot{x}/\dot{y} \quad och \quad \dot{x}/\dot{y} = 1/x \quad Þ \quad s = y/x.$$

Ett resultat vi enkelt kan verifiera med modern notation:

$$\frac{y}{s} = y' = x \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{y}{x}\ .$$

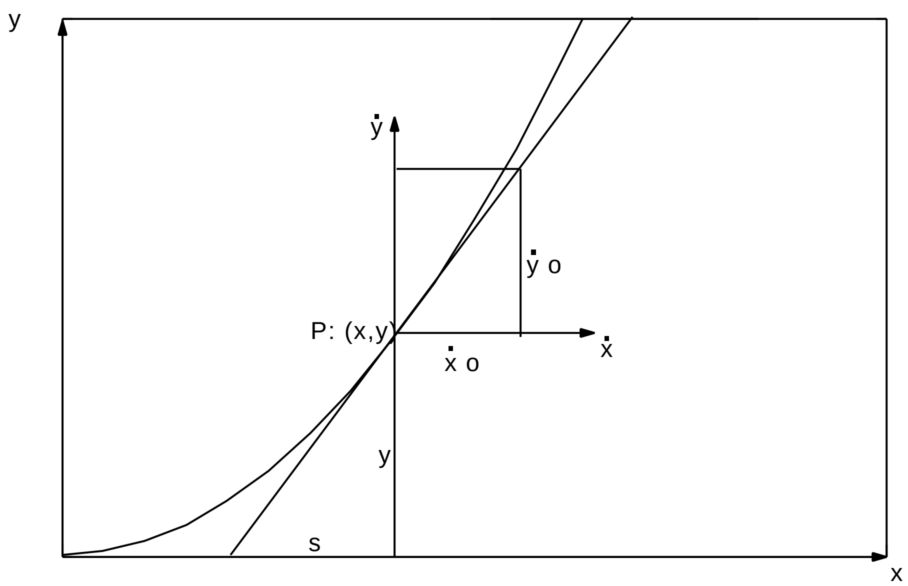

Fig. 3.

LEIBNITZ

Leibnitz inför[4] "den karakteristiska triangeln" (fig. 4). Sidorna i triangeln: *dx, dy* och *ds,* kallade han differentialer och dessa angav han som "oändligt små". Tangentens riktningskoefficient, derivatan med vår tids benämning, blir med den här framställningen helt enkelt *dy/dx*. Leibnitz anger också kort och koncist att $1 = \int d$ och $1 = d\int$. Det vill säga han har tillfullo insett den inversa karaktären hos integral och derivata. Leibnitz beteckningar har stått sig sedan 1676 och den enda stora svagheten i hans framställning är att han har svårt att förklara vad som menas med en "oändligt liten differential" liksom Newton inte kunde definiera sina "fluxioner" och Fermat ej definierade sitt "mystiska *e*".

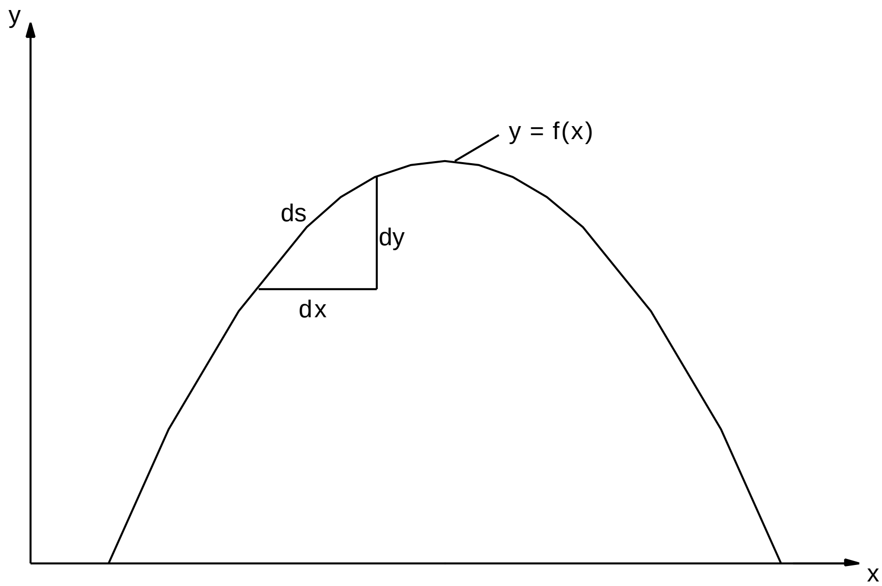

Fig. 4.

CAUCHY

I sitt mest berömda arbete "*Cours d'analyse*" (1821-1829), försökte Cauchy ge stringenta definitioner av bland annat: gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet samt infinitesimalerna:

Gränsvärde: "När de successiva värdena av en variabel obegränsat närmar sig ett fixt tal, så att de slutligen skiljer sig från detta med ett godtyckligt litet belopp, kallas detta belopp gränsvärdet för variabeln."

Kontinuitet: "En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i ett intervall, om $f(x + \alpha) - f(x)$ är oändligt litet, då α är oändligt litet."

Infinitesimal: "en variabel med gränsvärdet 0."

Även om Cauchy i princip kommer mycket nära sitt mål når han som synes inte riktigt ända fram då han är tvungen att, liksom Leibnitz, förlita sig på begrepp som "oändligt liten". Infinitesimalens spöke svävar alltjämt över analysen.

WEIERSTRASS

Det blev Karl Weierstrass som slutgiltigt definierade gränsvärdet (denna definition är den som används än idag).
Definitionen av gränsvärdet av en funktion *f(x)*, då *x* går mot *a* är följande:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ om och endast om det för varje tal ε > 0 existerar ett tal δ > 0 sådant att $|f(x) - L| < \varepsilon$ för alla *x* sådana att $0 < |x-a| < \delta$.

Olyckligtvis uppfattar många studenter denna definition som svårtillgänglig, sannolikt på grund av rent språkliga svårigheter att konkretisera matematikens abstrakta och extremt komprimerade uttryckssätt. En kompletterande geometrisk framställning visar definitionens enkelhet (fig. 5):

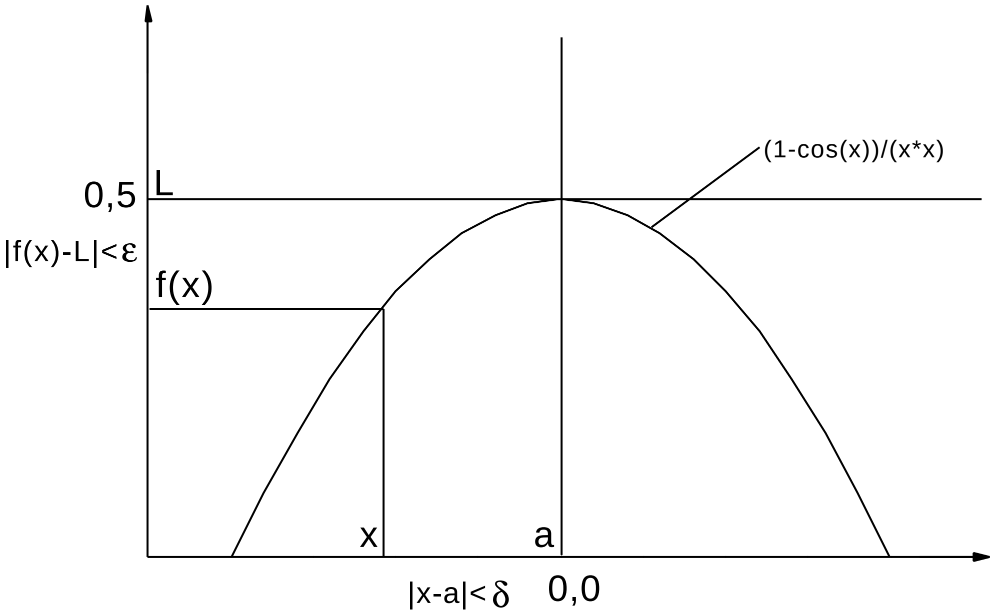

Fig. 5. I detta (välkända) fall kommer det alltid att existera ett δ > 0, hur litet ε man än väljer.

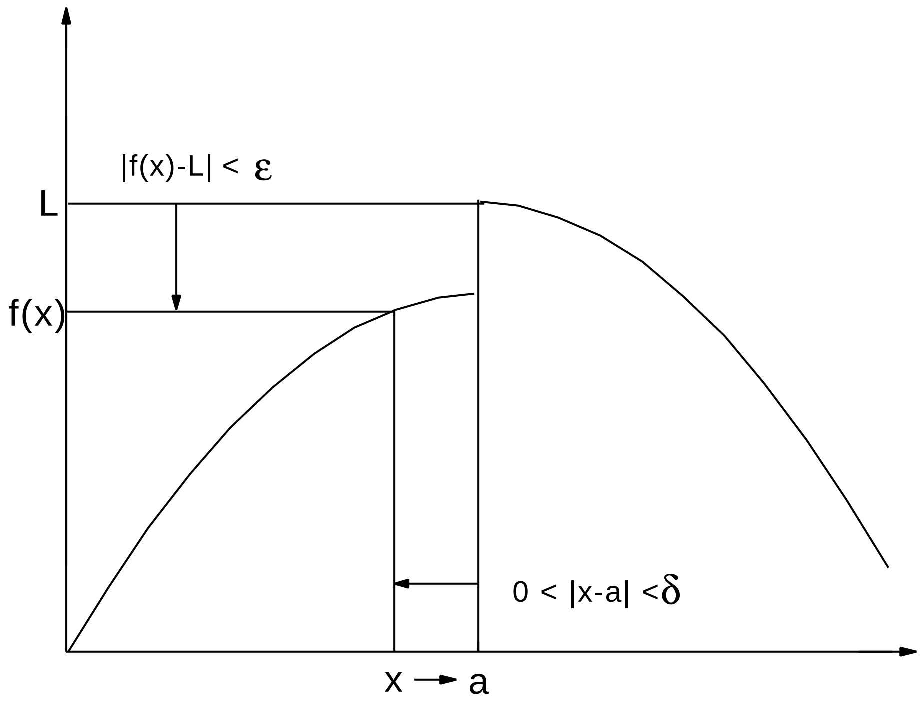

Fig. 6.
I detta fall, då funktionen inte är kontinuerlig, är det uppenbart att om ε väljs tillräckligt litet kommer inte $|x-a| > 0$ för alla x. Det existerar inte något δ som uppfyller kriterierna och följaktligen existerar heller inte något gränsvärde.

INTERVJUER

METOD

För att kunna utröna *hur* elever har förstått eller inte förstått derivata väljer jag att göra kvalitativa intervjuer. Att dela ut enkäter tror jag i detta fallet inte på eftersom jag befarar att flertalet elever av taktiska skäl, liksom jag själv gjorde på gymnasiet, koncentrerat sig på att behärska "deriveringsmallarna" mer än att tillägna sig en djupare begreppslig förståelse. Då jag undervisat i derivata på C-kursen under min slutpraktik vet jag att tidsbristen under denna kurs är stor samt att tekniskt korrekta lösningar ger större utdelning vid betygssättning än begreppslig förståelse. Av dessa skäl drar jag slutsatsen att många elever sannolikt skulle fylla en enkät med synnerligen magra formuleringar, även med tanke på att både "morot och piska" saknas.
För att nå målet med undersökningen tror jag att eleverna behöver ha möjlighet att diskutera frågeställningarna. De oundvikliga negativa effekter som detta kommer att medföra med ledande frågor och annan påverkan tror jag mer än väl kommer att uppvägas av svarens högre kvalitet. Detta förutsätter förstås ett någorlunda professionellt agerande av intervjuaren. Intervjuerna kommer att spelas in på band.
Jag har medvetet låtit elevernas personligheter påverka mina frågor något för att en dialog skall kunna uppstå och för att undvika onödig ”fyrkantighet”. Intervjuerna är som nämnts kvalitativa och resultaten skall inte behandlas statistiskt.
Alla tre eleverna går i årskurs tre på Ale Gymnasium, Naturvetenskapsprogrammet. Elev 1 och 3 är flickor och elev 2 förstås pojke. Samtliga har klarat sina matematikkurser utan större besvär.

För intervjufrågor se bilaga 1.

RESULTAT

1 Samtliga elever anser att de förstod derivatan då de (för ungefär ett år sedan) läste C-kursen.

2 Ingen tycker att derivata var svårare att lära sig än annan matematik.

3 Ingen elev har några djupare idéer om hur derivata skall förklaras.

4 Ingen elev nämner kontinuitet eller gränsvärde som nödvändigt att kunna innan man börjar med derivata.

5 Ingen av eleverna upplever att de har haft någon större glädje av derivatans definition. Elev 2 är ensam om att minnas den.

6 Samtliga tycker att den undervisning de fått i området är ok, förutom en elev som hävdar att de fick alldeles för lite tid.

7 Elev 1 menar att all abstrakt matematik är likadan – man får acceptera saker man inte förstår.
Elev 2 hävdar att derivata blir mycket svårt om man inte behärskar grunderna (algebra m.m.).
Elev 3 Tror att det kan bero på att ”det blir så många steg”.

8 Elev 1 förstod derivata då de deriverade och integrerade i samma graf.
Elev 2 förstod derivata då han insåg sambanden mellan acceleration, hastighet och sträcka.
Elev 3 minns ingen speciell händelse som gav förståelse.

9 Elev 1 har inget speciellt att tillägga förutom att derivata gett henne mardrömmar (!)
Elev 2 vill poängtera att om man behärskar grunderna (speciellt algebra) är derivata inget större problem.
Elev 3 tyckte att derivata var det roligaste avsnittet i kursen.

DISKUSSION

Samtliga elever är anmärkningsvärt eniga i sina åsikter om derivata. De anser att de har förstått derivata men ingen ens nämner gränsvärde och alla tre fnissar då vi kommer in på derivatans definition som de knappast alls tycker har förmedlat någon förståelse.
På något vis menar de att de förstått derivata trots att de är medvetna om att de bara följer regler eller som de själva uttrycker det: ”följa ett mönster” samt ”bara och hitta och kolla” (alltså i formelsamlingen). Samtidigt säger de utan omsvep att derivatans definition inte tillförde något. Begreppet förståelse tycks här tydligen förskjutits till något i stil med att ”eftersom jag fick VG på derivataprovet måste jag ju ha förstått”, vilket väl kan sägas vara en ur elevens synvinkel, ganska naturlig slutsats.
Ingen av dessa tre elever har upplevt derivatan som ett oöverstigligt problem, de kan derivera och de har klarat av sina kurser på ett föredömligt vis. Är det då ett stort problem om de inte upplever kontinuitet, gränsvärde och derivatans definition som meningsfulla begrepp? Den frågan kan inte enkelt besvaras; om de *inte* fortsätter med matematik spelar det kanske ingen större roll (?) och om de fortsätter att läsa matematik lär de bli tvungna att skaffa sig en djupare insikt i dessa begrepp. Men ändå vågar jag påstå att så gott som samtliga inblandade, såväl elever som lärare, tycker att det är ganska eländigt om eleverna sitter och deriverar ”medvetslöst” efter regler vars bakgrund de inte förstår.
Det stora problemet som sätter frågan på sin spets är då man möter mindre studiemotiverade elever som vägrar, eller kanske helt enkelt är okapabla, att plugga in och reproducera matematik de inte har förstått. Det skulle vara intressant att intervjua ett större antal elever som har haft problem med att få godkänt på C-kursen. En sådan intervjuserie faller dock utanför ramen för detta arbete.

REFLEKTIONER KRING UNDERVISNING I MATEMATIK

Detta avsnitt skall betraktas som en utvidgning med lägre krav på vetenskaplighet. Motivet till att det alls skall vara med är att studiet av undervisning i derivata synliggör förhållanden som nog kan gälla stora delar av matematiken både på grundskolan och i gymnasiet; för när blir egentligen matematiken abstrakt? Självfallet är svaret på den frågan synnerligen individrelaterat. Somliga upplever matematiken som alltför abstrakt redan i lågstadiet medan andra kanske inte gör det förrän universitetets B- eller C-kurser och ett fåtal inte ens då. Min mening är att det kan vara värdefullt med genomtänkta reflektioner även då varje idé eller påstående inte kan härledas i strikt vetenskaplig mening.

PROBLEM

Ovanstående tre intervjuer visar möjligen inte på några större problem och jag misstänker starkt att, om än inte bland matematiker, så är elevernas upplevelser av derivering ändå vanligt förekommande bland civilingenjörer och naturvetare – man deriverar glatt utan större bekymmer om härledningar, bara det fungerar och det gör det ju i de allra flesta fallen.
Problem uppstår när elever slår bakut och av olika skäl vägrar medverka i den allt för vanliga plugga-tenta-glömma-kulturen. Egentligen är det ju tveksamt om just detta verkligen är ett problem – man kan lika gärna hävda att det är djupt sympatiskt och ett uttryck för kvalitetsmedvetande då elever vägrar acceptera att tiden, eller i värsta fall pedagogiken, inte räcker till för att förmedla mening och förståelse.
Ett annat problem är att det naturligtvis för de flesta är så att halveringstiden för kunskaper man pluggat in utan upplevelse av förståelse och mening är skrämmande kort.

I skolans värld behöver inte ovanstående frågeställningar upplevas som alltför komplexa och svåröverskådliga, för facit finns ju. I kursplanen för Matematik C kan man bl.a. läsa:

”Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs:
kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs”

Hur stor andel av gymnasieeleverna har uppnått detta mål? Enligt kursplanen är det definitivt inte tillfyllest att ”hitta och kolla” eller reproducera ”mönster”.

Ett för samhället mycket konkret och praktiskt problem, som nog i hög grad hör samman med undervisningen i matematik, är att de för naturvetenskapliga studier behöriga gymnasieeleverna har visat sig vara till antalet mycket färre än platserna på högskolan, trots de relativt goda möjligheterna att få ett välavlönat arbete inom denna sektor. Antalet platser på högskolan styrs i sin tur av det i samhället förväntade behovet av naturvetare…

ORSAKER

En för de flesta inblandade uppenbar orsak till problemen kring derivata är att tiden för kurs C och D är alldeles för kort. Det är ju i dessa kurser matematiken börjar bli ordentligt komplex och abstrakt. Här har Skolverket enligt min mening verkligen misslyckats med fördelningen av lektionstiden.

En annan djupare och mycket intressantare orsak tror jag är matematikkulturen i sig. Många matematiker hävdar att matematiken till sin natur är axiomatisk, vilket leder dem till den felaktiga slutsaten att förståelse bäst förmedlas genom att trava axiom och satser på varandra. I verkligheten behöver inte aritmetiken Peano, de irrationella talen, t.ex. π, behöver inte Cauchy, pythagoras sats behöver inte Pythagoras. Alla dessa begrepp har använts praktiskt, och därmed obestridligen funnits, i tusentals år - man vet faktiskt inte alls hur länge. Det är, som jag förstått det, matematikersamfundets mål att *konstruera* ett ”vattentätt” axiomsystem (trots att Gödel visat att det är omöjligt?). Matematiken har dock fungerat i århundraden före både Gödel och Euklides. Endast en närmast försumbar del, sannolikt mindre än en tusendel, av gymnasieeleverna kan senare tänka sig att doktorera i matematik. Dessa elever är mottagliga för klassiska matematiska förklaringar d.v.s. man travar axiom, satser, lemmor m.m. på varandra och når på detta vis snabbt otroliga höjder. Min poäng är självfallet att man absolut inte får låta denna ytterst minimala minoritet styra undervisningen i matematik för den stora gruppen elever. Alla jag känner vill först se mål och mening med ett nytt begrepp, t.ex. derivata, därefter vill man använda begreppet och se att det fungerar och känna att man behärskar det. Då, men endast då, är man mogen att gå en nivå djupare och ta till sig komplicerade härledningar och definitioner. Även om detta låter helt naturligt och uppenbart för alla skall man vara medveten om att åtminstone inga av mig kända läromedel följer denna modell. Vilken läromedelsförfattare vågar gå emot matematikkulturen och hela matematikersamfundet?
Under de kurser jag läst i matematik och fysik på både gymnasiet och högskolan har det hänt alltför ofta att välvilliga, men didaktiskt naiva, föreläsare fyllt flera tavlor med formler då det blivit uppenbart att majoriteten av studenterna inte förstått. Då studenterna efter detta ser *ännu* olyckligare ut fyller den välvillige föreläsaren ytterligare fyra tavlor med härledningar och konstaterar sedan att efter *detta* måste alla ha förstått! I föreläsningssalen är det då tyst som i graven – ingen orkar ens öppna munnen.

Antagande 1: Förståelse förmedlas i regel ***inte*** bäst genom att trava axiom och satser på varandra.
Antagande 2: Om brist på förståelse uppstått på grund av att traven av axiom och satser alltför snabbt blivit alltför hög är det ingen bra lösning att göra traven ännu högre **–** ***då vill det till någonting annat!***

SLUTSATSER

Att producera kursplaner och läromedel i matematik faller förstås långt utanför detta arbetes ramar. Vad som däremot kan göras är att försöka identifiera några problem av vilka en del dåligt kommer fram i skoldebatten:

På 50-talet tog omkring 8% av ungdomarna studenten, idag skall motsvarande siffra vara över 98%. Kan detta genomföras utan stora förändringar i pedagogiken? Frågan är naturligtvis retorisk – annars vore den infantil. Våra läromedel i matematik är, om man bortser från bilder och layout, i detta perspektiv förvånansvärt oförändrade.

Ingjut så långt som möjligt alltid tydliga mål och mening i all matematik eftersom en stor del av dagens elever kräver detta för att överhuvudtaget kunna ta matematiken till sig. En väg för att lyckas med detta kan vara att studera hur och varför matematiska begrepp uppstått i historien. Ofta, om än långtifrån alltid, har matematiken vuxit fram p.g.a. att det har funnits ett konkret behov av den.
Beakta även att uttalade eller outtalde hotelser om framtida umbäranden inte längre tycks verka lika motiverande på dagens elever som det möjligen gjorde på gångna tiders.

Framför allt - ge eleverna en ärlig chans! Matematik, alltså någonting utöver att repetera algoritmer, kräver mycket stor närvaro och alltså ”största möjliga tysssstnad” – som i bibliotekets läsesal eller som i ett klassrum före 1965. För de flesta elever, liksom för mig, är det *helt omöjligt* att genomföra mer komplicerade matematiska beräkningar i ens lindrigt stökig miljö. Yrkesinspektionen har nyligen räknat ut hur oväntat mycket sämre tjänstemän tänker och presterar p.g.a. det buller som kontorens ventilationssystem medför. Ett annat aktuellt problem för Yrkesinspektionen är att lärare, även i teoretiska ämnen, i allt högre utsträckning blir bullerskadade (bullerskador anses uppkomma då ljudnivån varaktigt överstiger 85dB – jämförbart med ljudnivån inne i hytten på en omodern traktor).
Dagens ”fria och kreativa kaos” i klassrummen är måhända något positivt då man diskuterar samhällskunskap och historia men detta förhållande gäller inte matematik. Redan på denna mest grundläggande punkt (?) fallerar många grundskolor och gymnasier. Förklaringen är nog helt enkelt att man verkar ha förlorat förmågan att upprätthålla och vad värre är, t.o.m. erkänna behovet av nödvändig arbetsro i klassrummen på många grundskolor. Min teori är att detta allmänt kända men i hög grad tabubelagda problem drabbar matematiken mycket hårdare än andra ämnen. På gymnasiet kan inte mycket göras eftersom eleverna redan i årskurs 9 väljer bort matematik och naturvetenskap. Om man vill att fler elever skall läsa naturvetenskap på högskolan måste man alltså i första hand ändra på förhållandena i grundskolan.
Förklaringen till förhållandena på grundskolan är olyckligtvis mer politisk än didaktisk, varningslampan blinkar röd och jag släpper här denna fråga.

REFERENSER:

[1]S. Hollingdale. *Makers of Mathematics.* Penguin Books, Middlesex, 1989.

[2]L. Hellström, S. Morander, A. Tengstrand. *Envariabelanalys.* Studentlitteratur, Lund, 1991.

[3]*Nationalencyklopedin.* Bra Böcker, Höganäs, 1989.

[4]B. Sjöberg. *Från Euklides till Hilbert.* Åbo Akademis Förlag, Åbo, 1996.

[5]F. Swetz. *From Five Fingers to Infinity.* Open Court Publishing Company,1994.

[6]J. Thompson. *Historiens matematik.* Studentlitteratur, Lund, 1991.

[7]J. Thompson. *Matematik Lexikon.* Wahlströms & Widstrands, Falun, 1991.

[8]T. Tönisson. *Högre Matematik för Poeter.* Prisma, Stockholm, 1982.

[9]K. Weierstrass. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen Vorlesung Berlin 1878.* Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1988.

[10]Skolverket. *Kursplan i Matematik* ***MA1203 - Matematik*** **C,** 100 poäng inrättad 2000-07 SkolFs: 2000:5 , www.skolverket.se.

BILAGOR:

1. INTERVJUFRÅGOR:

1. Hur väl har du förstått derivata?

2. Hur tyckte du att det var att lära dig derivata?

3. Vad är derivata? Kan du förklara för någon som inte har förstått?

4. Vilka områden (begrepp) inom matematiken måste man lära sig innan man kan börja med derivata?

5. Vad minns du av derivatans definition?

6. Kan du föreslå något bättre sätt att lära ut derivata?

7. Vad tror du det är som gör att många tycker att derivata är extra svårt?

8. Vad fick dig att förstå derivata? / Varför förstod du inte derivata?

9. Har du något du själv vill tillägga?

2. INTERVJUER:

ELEV 1.

- Hur väl har du förstått derivata?
- Jag tyckte väl att när jag läste det förstod jag väl det ganska bra. Men sen vet jag ju inte hur mycket jag egentligen kan.

- När du t.ex. räknar ut att x^2 blir 2x, vet du vad du gör då eller följer du mest formelsamlingen?
- Nä, när jag gör det är det väl mest ett mönster bara som jag har lärt mig följa. Vad som verkligen händer gick vi väl också in på men jag är inte säker på att jag har förstått det.

- Om du träffar någon som inte läst derivata men gärna vill veta vad det är, hur skulle du förklara det då?
- Ett sätt att beskriva en kurva, hur frekvent den är, och hur hög amplitud den har…

- Hur tyckte du det var lära dig derivata, var det svårare eller var det som annan matematik?
- För mig var det en tröskel då jag måste acceptera saker som jag inte förstår, det började väl med sinus och cosinus och sådant, men när jag väl var över den tröskeln var inte derivata svårare än något annat. Det är ju inte helt lätt men det är lätt att lära sig ett mönster.

– Vad minns du av derivatans definition?
Inte nått… derivatans definition…ingen aning…det var ju den där långa formeln…

–Är du nöjd med det sätt som du fick lära dig derivata på eller kan du tänka dig något bättre sätt?
Säkerligen så finns det bättre sätt att lära sig det. Jag förstod ju inte riktigt allt, framför allt var det alldeles för kort tid som vi fick på oss för att jag skulle kunna ta till mig det.

- Det påstås att många tycker att derivata är svårare än annan matte, kan du förstå det?
Det är väl det abstrakta, det är svårt att applicera på verkligheten. Men jag tycker inte det spelar någon roll. Alla matte jag lärt mig sista tiden är likadan – jag lär mig ett mönster och så löser jag alla talen likadant. Det svåraste jag gjort i matematiken är när jag måste välja vilket mönster jag ska använda.

– Kommer du ihåg något speciellt som fick dig att förstå derivata?
Jag fick en större förståelse när vi började med integraler, när vi höll på med derivata och integraler samtidigt i samma kurva.

– Är det något du själv vill tillägga som kan vara av intresse?
Nä, jag är väl inte så intresserad av matte egentligen. Jag har inte reflekterat särskilt över just derivata – jo, jag har drömt mardrömmar om derivata!

ELEV 2

- Hur väl har du förstått derivata?

- Någotsånär, det finns väl områden som jag inte kan än.

- Hur tyckte du det var att lära sig derivata?

- I början tyckte jag det var helt meningslöst, men sen när man fick det där sambanden acceleration, hastighet, sträcka kände man att det hängde ihop.

- Men var det svårt att lära sig?

- Nej det tyckte jag inte faktiskt, det svåraste var när man skulle lära sig derivatans definition. Hallå, är det här verkligen vettigt? Det var mycket bättre när man fick lära sig reglerna.

- Släppte det någon gång med derivatans definition?

- Nä, jag tyckte mest att den var onödig. (fniss)

- Hur skulle du förklara derivata för någon annan som vill lära sig?

- Jag hade ritat upp en graf och visat lutning och så och formeln för lutningen.

- Vilka områden tror du är viktigt att kunna innan man lär sig derivata?

- Man måste ha lite kunskap om grafer, vad som påverkar dem och hur vissa ser ut och så. Och sen måste man ha rätt god kunskap om algebra, derivata var ju bara algebra.

- Vad minns du av derivatans definition?

- Att den var krånglig!! (paus) Jo, den sitter nog ungefär, när h går mot noll och så…
h är ju förändringen och när den blir noll kan man ju bortse från den.

- Kan du föreslå nåt bättre sätt att lära ut derivata eller var det bra som det var?

- Jag tyckte det var rätt bra. I början tyckte jag att det var mest flummigt när vi höll på med definitionen men sen när vi fick lära oss reglerna blev det mycket bättre. Det var ett omständligt sätt att gå till målet då det finns färdiga regler. Men det är ju bra att förstå var det kommer ifrån.

- Det påstås att många tycker att derivata är svårare än annan matte, kan du förstå det?

- Jag tror att det beror på att de inte kan algebran i grund och botten. Det måste bero på det. För derivatan i sig är inte svår, man har ju klara regler och de flesta står till och med i formelsamlingen. Det är ju bara att hitta och kolla.

– Kommer du ihåg något speciellt som fick dig att förstå derivata?

- Det var nog nån uppgift där man hade hastighet och tid och man skulle ha reda på nån acceleration…Först tänkte man –hallå, det här kommer aldrig att gå men sedan såg man att det fanns ett samband med derivatan och andraderivatan och det är ju trevligt.

- Tycker du att derivatan förklaras bättre i fysiken än i matten?

- Ja, i matten var det ju nästan bara råräknande och i fysiken var det mer labbar och sånt, med nån bil som accelererar eller så. Det ena liksom hjälpte det andra.

– Är det något du själv vill tillägga som kan vara av intresse?
- Jag har ingenting förutom det att det viktigaste är att man kan algebran. Algebran är det viktiga, derivatan är i sig rätt lätt. Algebran är det man måste kunna och det är bara att trycka i sig.
- *Det är kul att du säger det för du har naturligtvis rätt – kan man inte algebra, funktioner och räta linjens ekvation har man ingen chans att lära sig derivata.*
- Nä, min far håller på och trycker på det hela tiden…
- *Jaha, vad är han för något då?*
- Han har läst Elektro på Chalmers. Han säger att det finns vissa saker man måste kunna – algebran, sinus och cosinus måste man ha i huvudet!

ELEV 3
- *Hur väl har du förstått derivata?*
- Då tror jag att jag förstod det.

- *Hur tyckte du det var att lära sig derivata?*
- Först tyckte jag att det var svårt men när man väl fattade det, förstod principen, då gick det bra.

- *Vad är derivata egentligen? Kan du förklara för nån som inte har förstått?*
- Oj, nä det tror jag inte. Kanske på ett papper men inte med ord.

- *Vilka områden tror du är viktigt att kunna innan man lär sig derivata?*
- Potenser och så där, hur man behandlar parenteser, ja grunderna i matte.

- *Vad minns du av derivatans definition?*
- (lång paus) Nä, jag kommer inte ihåg.

- *Kan du föreslå nåt bättre sätt att lära ut derivata eller var det bra som det var?*
- Ja, det var nog bra för jag fattade ju till slut.

- *Det påstås att många tycker att derivata är svårare än annan matte, kan du förstå det?*
- Det är väl att det är så många steg…

– Kommer du ihåg något speciellt som fick dig att förstå derivata?
- Nej det kommer jag inte ihåg faktiskt.

– Är det något du själv vill tillägga som kan vara av intresse?
- Jag kommer ihåg att jag tyckte det var en av dom roligaste delarna i kursen i alla fall. När man väl förstår det så är det ju roligt.