

"Ellips, parabel och hyperbel"

"Patrik Johansson"

Innehållsförteckning

Kapitel	sida
Inledning	3
1. Beskrivning av ellips, parabel och hyperbel	4
1.1 Ellips	4
1.2 Parabel	7
1.3 Hyperbel	10
1.4 Kägelsnitt	14
2. Andragradsekvationer i två variabler	16
3. Kägelsnitt, homogena koordinater och projektiv geometri	19
3.1. Homogena koordinater	19
3.2. Kägelsnittets ekvation i homogena koordinater	21
3.3. Kägelsnitt i projektiv geometri	23
4. Kägelsnittens historia	25
Litteratur förteckning	27

Inledning

Detta är ett arbete om ellipsen, hyperbeln och parabeln, Jag har valt detta område för att det berördes endast förbigående på gymnasiet så jag ville därmed ge en framställning som kunde förstås av en elev i gymnasieskolan.

Arbetet börjar med en föreställning av de tre olika kurvorna samt deras definitioner, jag visar därefter att de är ekvivalenta. Man kan t ex uttrycka kurvorna som snitt i en dubbelkon, en s.k kägla.

Ekvationen för ett kägelsnitt är av andragraden och jag studerar i avsnitt 2 en allmän andragradsekvation. Det visar sig att denna i princip är ekvationen för ett kägelsnitt.

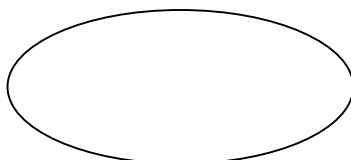
I avsnitt 3 ger jag en mer avancerad framställning av kägelsnitt genom projektiv geometri och med hjälp av homogena koordinater.

Jag avslutar med någon historisk anknytning till kägelsnitten bl.a kägelsnittens betydelse i fysiken.

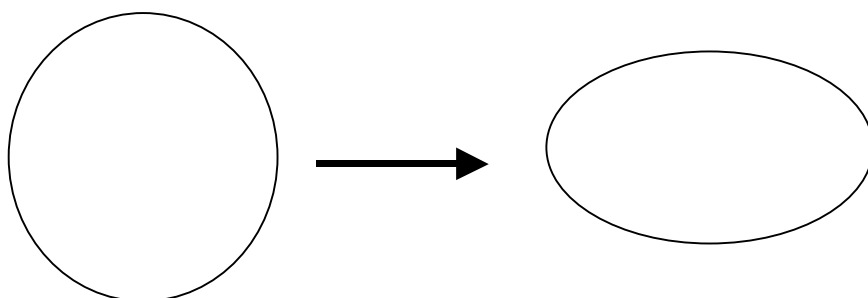
1. Beskrivning av ellips, parabel och hyperbel:

1.1 Ellips

En ellips kan man i dagligt tal uttrycka som en oval ”cirkel”.



Drar man i ”vänster” och ”höger” sida lagom mycket blir cirkeln en ellips.

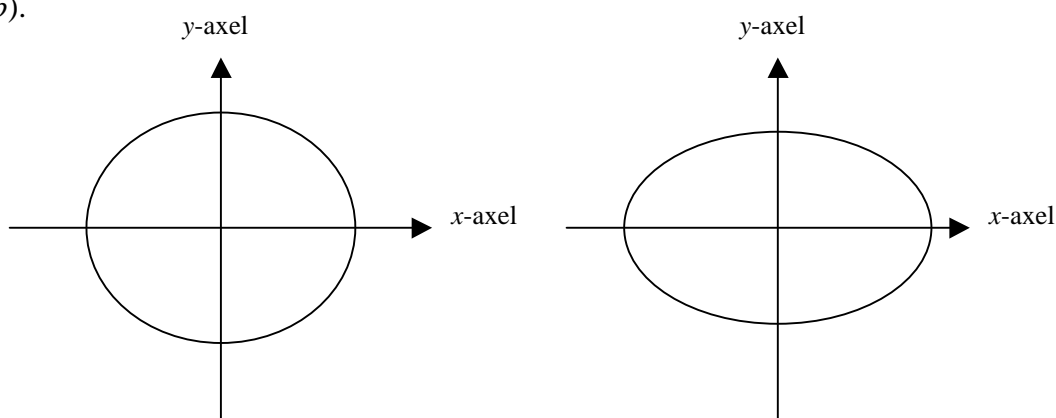


Denna formulering är allt för diffus så vi måste precisera oss.

Vi inför därför ett rätvinkligt koordinatsystem. Låter cirkeln ha en viss mittpunkt med viss radie. Ekvationen för en cirkel med radien 1 och medelpunkten i origo är då

$$x^2 + y^2 = 1$$

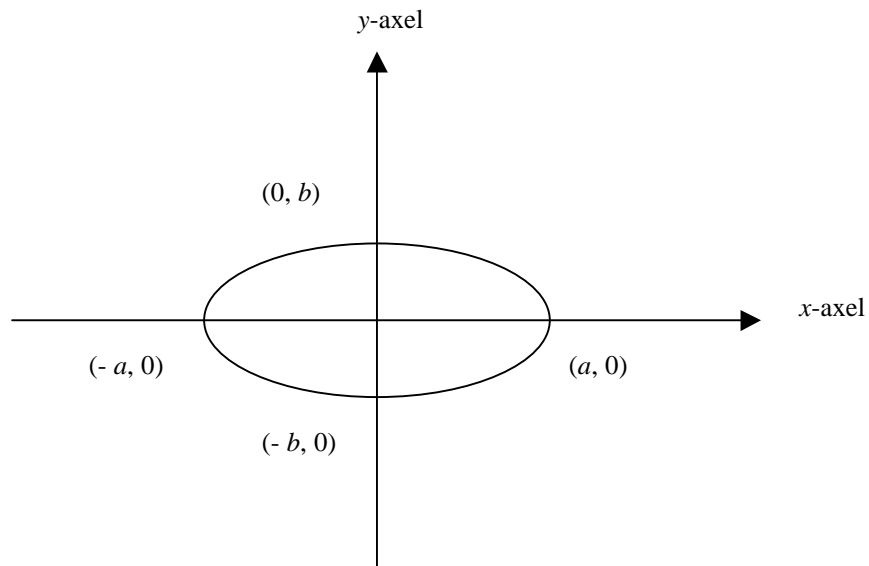
Med att dra ut cirkeln innebär att punkten $(1,0)$ över går till $(a, 0)$ och $(0, 1)$ övergår till $(0, b)$.



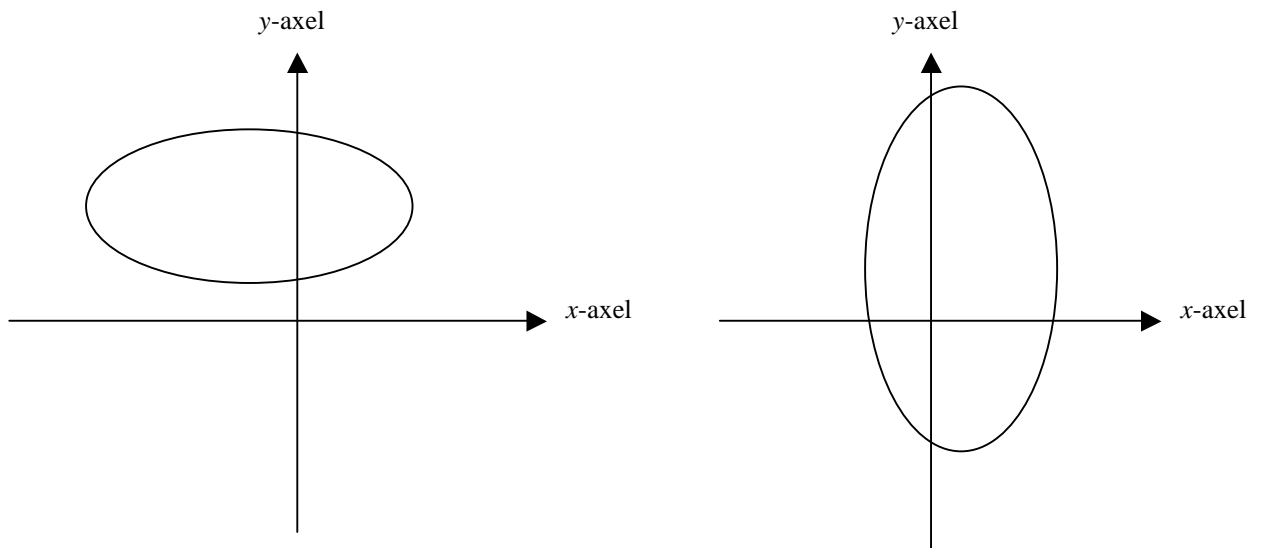
En sådan deformation får man om vi ersätter x med x/a och y med y/b . Den deformerade cirkeln får ekvationen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

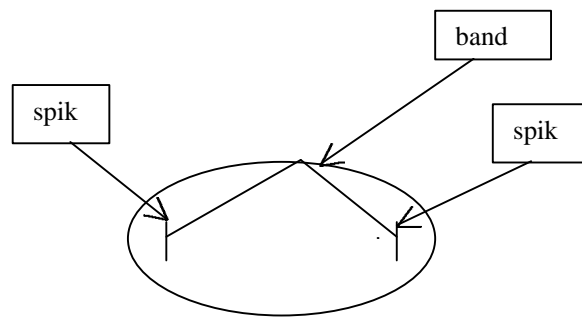
Vi säger nu att en ellips är en kurva som i något rätvinkligt koordinatsystem har detta utseende.



I ett givet koordinatsystem kan en ellips vara ritad på olika sätt. Man kan hitta i olika koordinatsystem där samma ellips har olika utseende.



En mer konkret definition av en ellips är att konstruera den med hjälp av två spikar, en penna och ett snöre.



Snörets båda ändrar spikas fast. Sträck sedan ut snöret med pennan och följ snöret runt med pennan så att snöret är sträckt hela tiden.

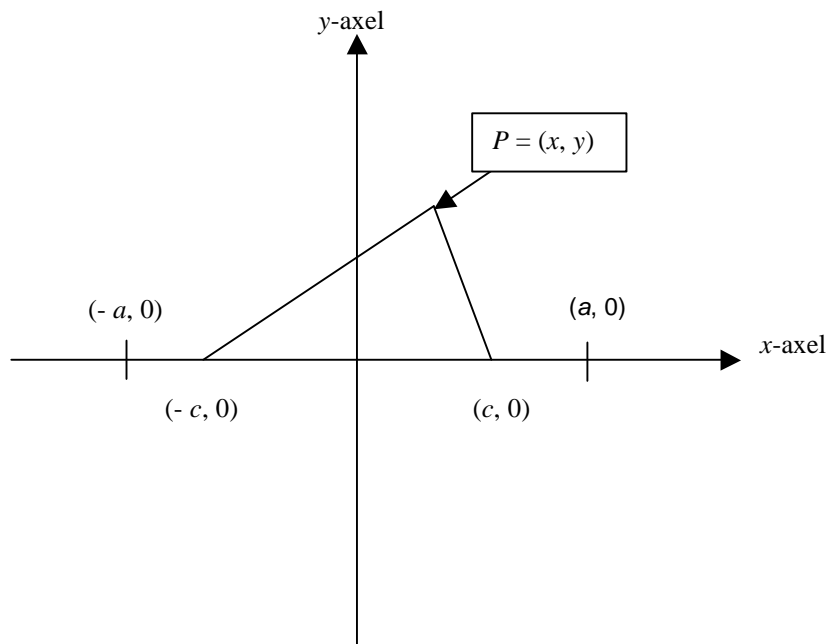
Med denna konstruktion som bakgrund kan vi ge följande definition.

”En ellips är en mängd punkter, vars avstånd till två givna punkter har konstant summa”.

Spikarna är här de båda givna punkter samt snörets längd den konstanta summan. Vi visar nu att de båda definitionerna är ekvivalenta genom att härleda ekvationen för en ellips enligt den andra definitionen.

Ta två punkter (spikar) på x -axeln och kalla dessa $(c, 0)$, $(-c, 0)$. Låt den konstanta summan (snörets längd) vara $2a$.

Det är lätt att se att kurvan går genom $(a, 0)$ och $(-a, 0)$. Summan av avstånden är för $(a, 0)$ nämligen $(a - c) + (a - (-c)) = 2a$.



Punkten $P = (x, y)$ ligger enligt den sista definitionen på ellipsen om endast om

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2 \cdot a.$$

Denna ekvation kan skrivas om på följande sätt

$$(x + c)^2 + y^2 = 4 \cdot a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4 \cdot a \cdot \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)$$

\Leftrightarrow

$$a^2 - c \cdot x = a \cdot \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)$$

\Leftrightarrow

$$a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot x + c^2 \cdot x^2 = a^2 \cdot \left((x - c)^2 + y^2 \right)$$

\Leftrightarrow

$$(a^2 - c^2) \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot (a^2 - c^2).$$

Eftersom

$$a^2 - c^2 > 0$$

kan man sätta

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Vi sätter in detta uttryck i den förenklade ekvationen ovan och dividerar med

$$a^2 \cdot b^2$$

och får

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Alltså är kurvan en ellips enligt vår ursprungliga definition.

1.2 Parabel

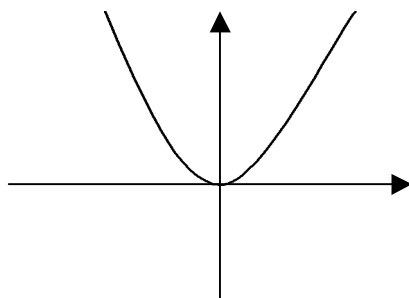
Den bild man vanligen har av en parabel är en kurva som i ett rätvinkligt koordinatsystem har ekvationen

$$y = x^2$$

eller

$$y = kx^2.$$

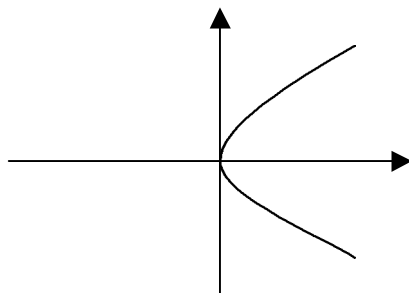
Den ser ut på följande sätt



Om vi byter ut x mot y får vi ekvationen

$$x = ky^2$$

då ser den ut på följande sätt:



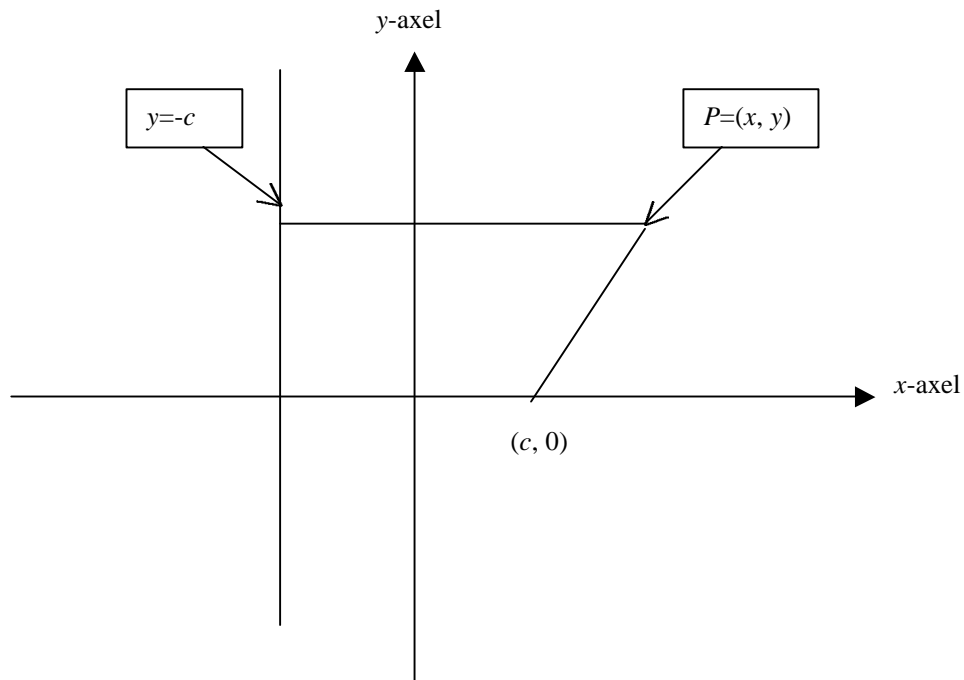
Det finns också ett geometriskt sätt att beskriva en parabel på.

”En parabel är en mängd av punkter, vars avstånd till en given punkt och till en given rät linje är lika.”

Vi visar nu att de båda definitionerna är ekvivalenta.

De givna punkterna antas ha koordinaterna $(c, 0)$ och $(-c, 0)$ den räta linjen har ekvationen $x = -c$. Alltså måste parabeln gå genom origo eftersom origo ligger mitt emellan punkterna $(c, 0)$ och $(-c, 0)$.

Punkten P antas ligga på parabeln och har koordinaterna $P = (x, y)$.



Enligt den sista av de båda definitionerna ligger $P = (x, y)$ på parabeln om och endast om

$$|x - (-c)| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

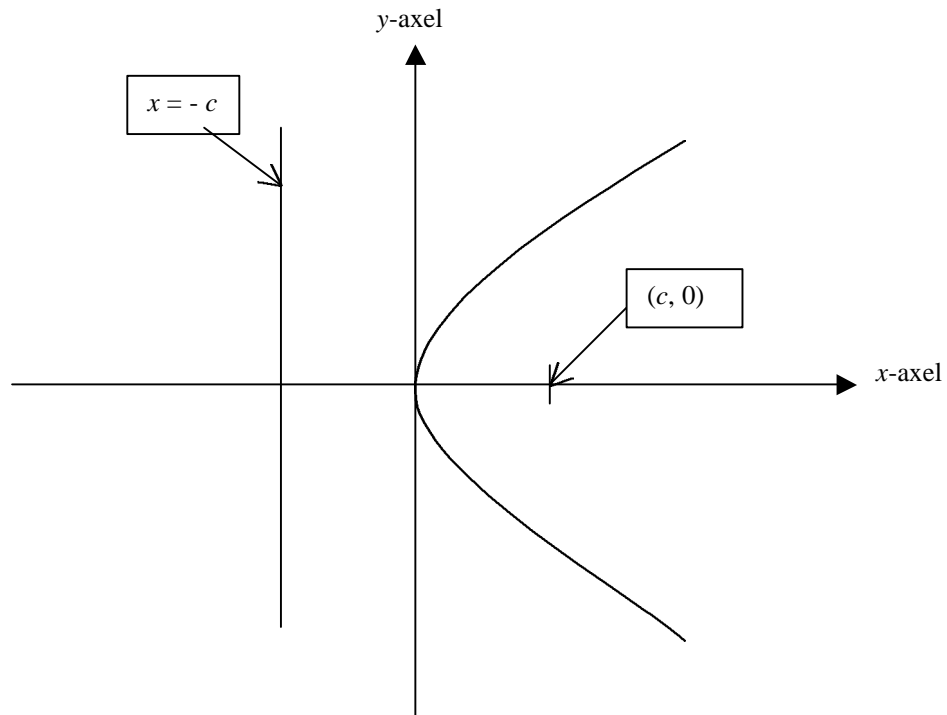
Vi gör följande omskrivning

$$(x + c)^2 = \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2$$

\Leftrightarrow

$$y^2 = 4 \cdot c \cdot x.$$

Alltså är detta en parabel enligt vår ursprungliga definition med $k = 4c$.
Observera att $x + c \geq 0$ eftersom (x, y) måste ligga till höger om y -axeln.



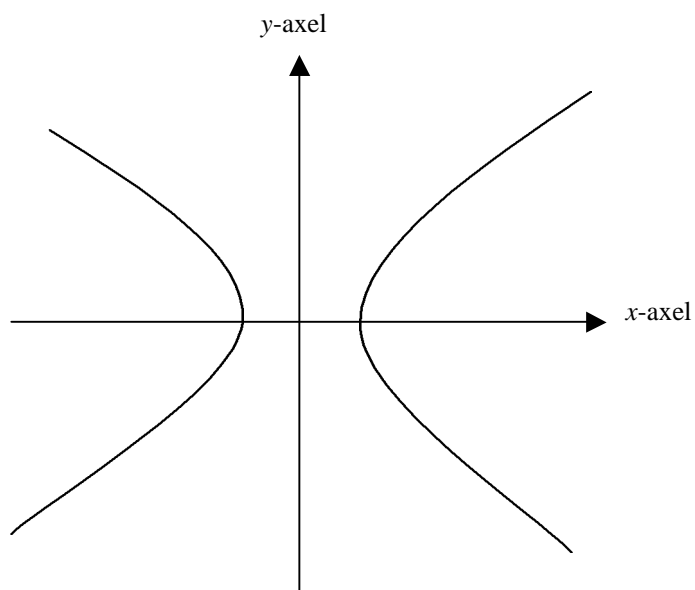
1.3 Hyperbel

Hyperbeln är på många sätt mer komplicerad än ellipsen och parabeln. Den används sällan i gymnasiekurser.

Rent algebraiskt kan man säga att vi får en hyperbel genom att byta plustecknet framför y i cirkelns ekvation mot ett minus tecken. Kurvan som har ekvationen

$$x^2 - y^2 = 1$$

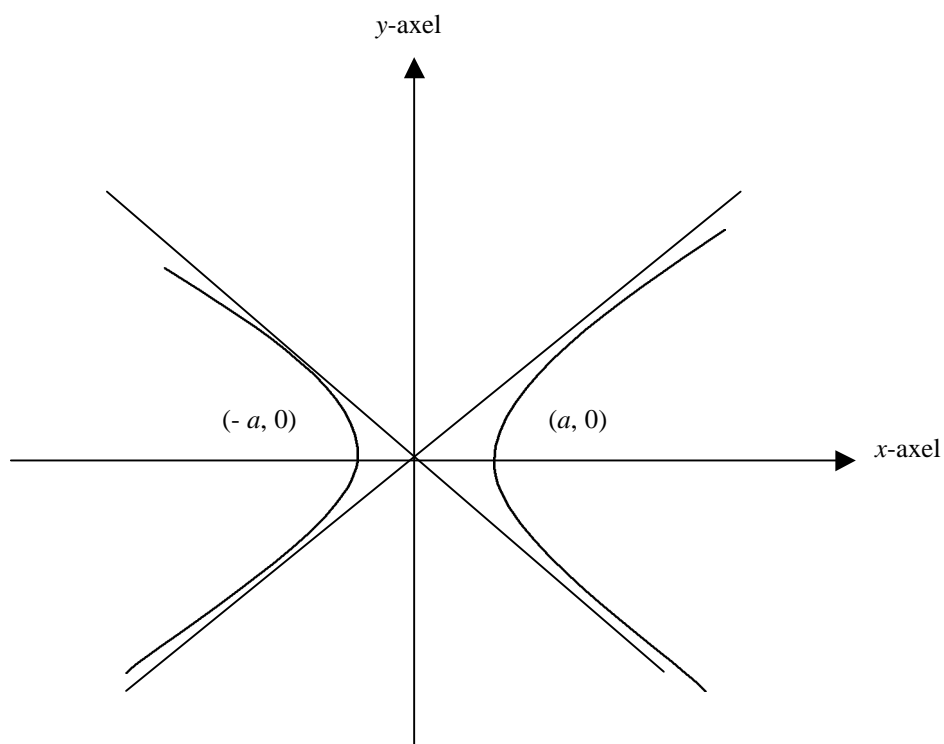
är alltså en hyperbel och vi skall kalla den liksidig. Den ser ut på följande sätt:



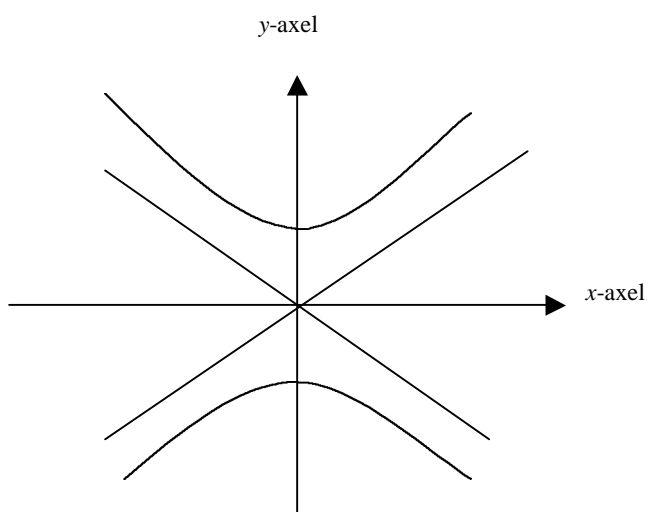
Vi ersätter x med x/b och y med y/b . Då får vi ekvationen:

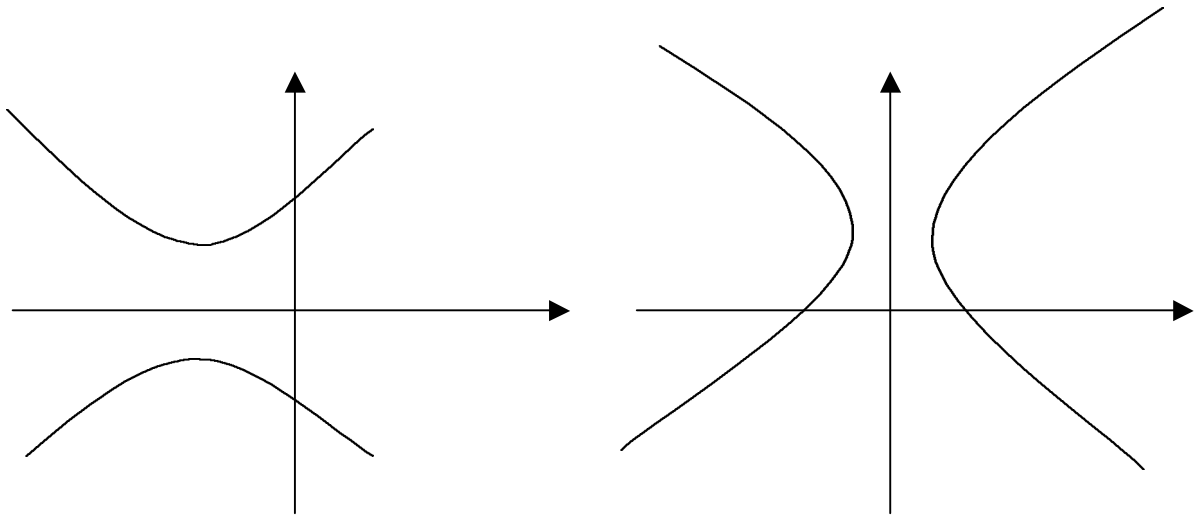
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En hyperbel ser ut på följande sätt:



I andra koordinatsystem har hyperbeln t ex följande utseende.





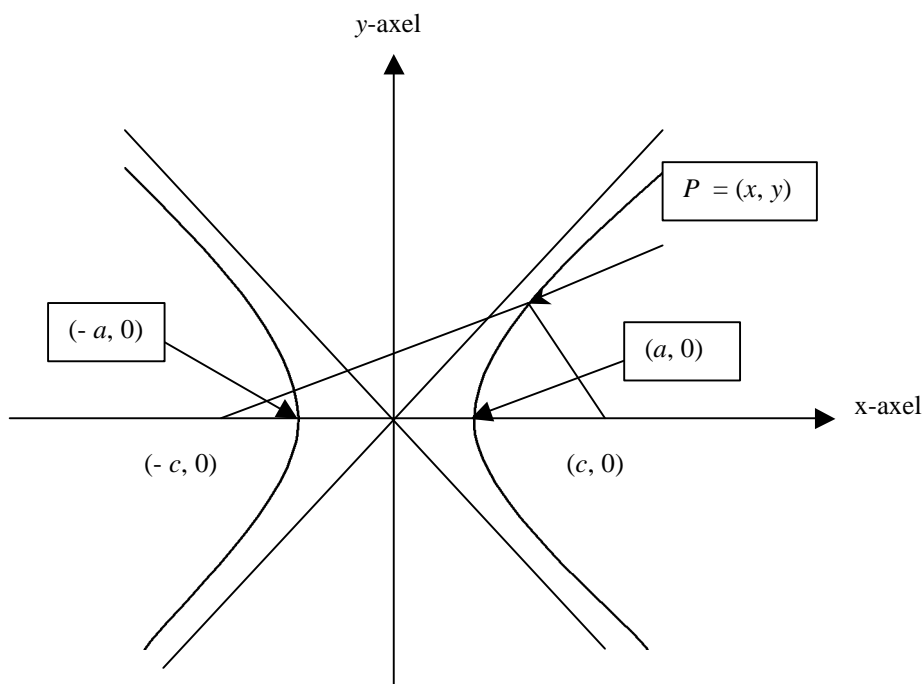
Också i hyperbel fallet finns en geometrisk definition.

”En hyperbel är en mängd punkter, vars avstånd till två givna punkter har en skillnad som har konstant absolutbelopp”.

Vi visar nu att de båda definitionerna är ekvivalenta.

Antag $P = (x, y)$ vara en punkt på en hyperbel enligt den andra definitionen.

De båda givna punkterna $(c, 0)$ och $(-c, 0)$ kallas brännpunkter. Den konstanta skillnaden kallar vi $2a$ alltså måste $2a < 2c$. Det är lätt att se att hyperbeln går genom $(a, 0)$ och $(-a, 0)$.



Antag att

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2 \cdot a$$

Vi kan skriva om denna ekvation på följande sätt

$$(x + c)^2 + y^2 = 4 \cdot a^2 + (x - c)^2 + y^2 + 4 \cdot a \cdot \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)$$

\Leftrightarrow

$$a^2 + c \cdot x = a \cdot \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)$$

\Leftrightarrow

$$(a^2 + c^2) \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot (a^2 + c^2) \quad (2)$$

Eftersom

$$a^2 + c^2 > 0$$

så kan man sätta (3)

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Sätter in ekvation (3) i ekvation (2) och får följande

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$$

dividerar med

$$a^2 \cdot b^2$$

ekvationen för hyperbeln blir då

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Alltså är de båda definitionerna ekvivalenta.

Hyperbelns asymptoter

Med en asymptot till en kurva menar man en rät linje som approximerar kurvan väldigt nära när man rör sig långt bort på den. Antag t ex att kurvan $y = f(x)$ är definierad för alla x . Då är en sned rät linje där (k och m är reella konstanter)

$$y = kx + m$$

asymptot till funktionen, när x blir stort positivt om

$$f(x) - (kx + m)$$

blir godtyckligt nära 0 då x är tillräckligt stort. Denna skillnad är avståndet i y -led mellan punkten $(x, f(x))$ på grafen $y = f(x)$ och punkten $(x, kx + m)$ på linjen

$$y = kx + m$$

(på motsvarande sätt definierar man asymptoter när x går mot negativa oändligheten). Det finns ytterligare en situation när funktionen kan ha en linje som asymptot, nämligen när $f(x)$ går mot oändligheten när x närmar sig en punkt a på x -axeln. Då säger man att linjen

$$x = a$$

är en lodrät asymptot.

Hyperbelns ekvation kan skrivas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ eller } \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Om nu (x, y) är en punkt på hyperbeln i första kvadranten så får vi att

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}.$$

Högerledet går mot noll om x och y går mot oändligheten. Alltså är den räta linjen en asymptot till hyperbeln då x går mot plus oändligheten. Av symmetriska skäl följer att

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

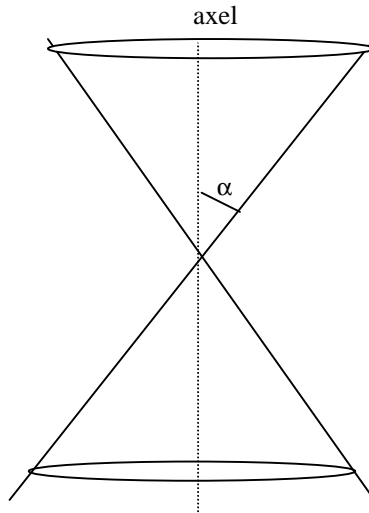
är asymptot då x går mot minus oändligheten och y går mot minus oändligheten. Vidare är också

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

en asymptot då x går mot oändligheten och y går mot minus oändligheten samt x går mot minus oändligheten och y går mot oändligheten.

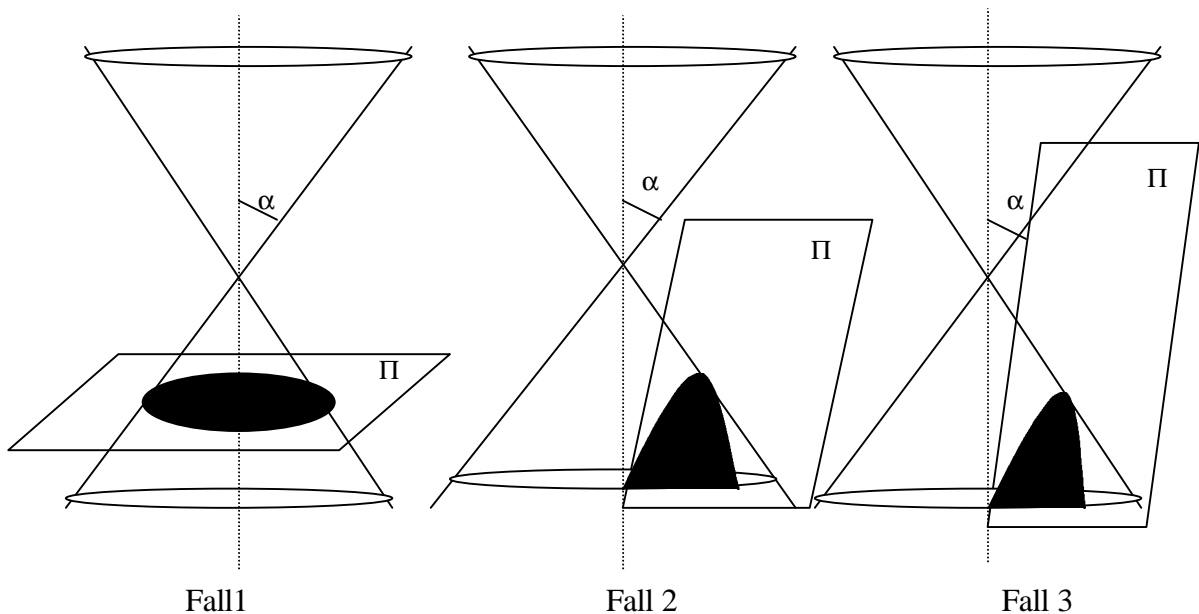
1.4 Kägelsnitt

En ellips, parabel och hyperbel är också ett kägelsnitt. Ett kägelsnitt är precis som det låter, ett snitt i en kägla som är en dubbelsidig cirkulär kon. Konen definieras av en axel och en vinkel.



Vinkel \mathbf{a} är vinkeln mellan axeln och konens generatis. Om man låter ett plan Π som skär dubbelkonen och axeln under en viss vinkel låt oss kalla den \mathbf{b} så får man följande tre fall.

1. Om $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ dvs planet Π skär dubbelkonen två gånger och axeln med en vinkel \mathbf{b} då får vi en ellips.
2. Om $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ dvs planet Π skär dubbelkonen en gång och axeln med en vinkel \mathbf{b} då får vi en parabel.
3. Om $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ dvs planet Π skär dubbelkonen två gånger och axeln skär axeln med vinkeln \mathbf{b} då får vi en hyperbel.



Bevis för att ellips, parabel och hyperbeln verkligen är ett kägelsnitt visas i avsnitt 3 och t ex i Klassisk geometri av Anders Tengstrand.

2. Andragradsekvation i två variabler

Vi börjar med att förklara vad en andragradsekvation är för något och hur man använder den i våra tre specialfall. Den allmänna andragrads ekvationen ser ut på följande sätt

(1)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Vi antar att (x, y) är koordinater i ett parallellkoordinatsystem. Axlarna behöver inte vara vinkelräta och enheterna på de båda axlarna behöver inte vara lika.

Om vi gör följande transformation i andragradsekvationen

$$x = a \cos q - b \sin q$$

$$y = a \sin q + b \cos q.$$

där a och b är nya koordinater och q en konstant som vi senare ska bestämma, får vi att

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = A(a \cos q - b \sin q)^2 + 2B(a \cos q - b \sin q)(a \sin q + b \cos q) + C(a \sin q + b \cos q)^2 + 2D(a \cos q - b \sin q) + 2E(a \sin q + b \cos q) + F.$$

Andragradsekvationen kan nu skrivas

$$A_1 a^2 + 2B_1 ab + C_1 b^2 + 2D_1 a + 2E_1 b + F_1 = 0$$

där

$$A_1 = A \cos^2 q + 2B \sin 2q + C \sin^2 q$$

$$B_1 = -A \sin 2q + B \cos 2q + C \sin 2q$$

$$C_1 = A \sin^2 q - 2B \sin 2q + C \cos^2 q.$$

Vi väljer q så att

$$\tan 2q = \frac{2 \cdot B}{A - C}.$$

och då blir $B_1 = 0$. Vi får att

$$A_1 a^2 + C_1 b^2 + 2D_1 a + 2E_1 b + F_1 = 0.$$

I ekvationen ovan måste minst A_1 eller C_1 vara $\neq 0$. Anta först att $C_1 \neq 0$ och $A_1 \neq 0$. Gör transformationen

$$x_1 = a + \frac{D_1}{A_1}$$

$$y_1 = b + \frac{E_1}{C_1}.$$

Kurvans ekvation blir då

$$A_1 x_1^2 + C_1 y_1^2 + F_1' = 0.$$

Här kan man se att om A_1 , C_1 och F_1' har samma tecken, så finns det inga reella lösningar. I övriga fall finns där reella lösningar.

Om till exempel A_1 och C_1 har samma tecken och F_1' motsatt, så kommer ekvationen bli en ellips, om A_1 och C_1 har motsatt tecken får vi en hyperbel.

Om $A_1 = 0$ så utför man transformationen

$$\begin{aligned}x_1 &= \mathbf{a} \\ y_1 &= \mathbf{b} + \frac{E_1}{C_1}.\end{aligned}$$

Och får då

$$C_1 y_1^2 + 2D_1 x_1 + F_1 = 0$$

Om $C_1 = 0$ får vi en rät linje och om $C_1 \neq 0$ får vi två fall.

Fall 1:

Om $D_1 = 0$ och C_1 och F_1 har samma tecken, så kommer ekvationen sakna reell bild, om C_1 och F_1 har olika tecken får vi två parallella räta linjer.

Fall 2:

Om $D_1 \neq 0$, blir andragradsekvationen

$$C_1 y_2^2 + 2D_1 x_2 = 0$$

efter utförd transformationen

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + \frac{F_1}{2 \cdot D_1} \\ y_2 &= y_1.\end{aligned}$$

I detta fallet får vi en parabel.

Vi skall nu visa att man utan transformation av variablerna kan se om ekvationen är en ellips, hyperbel eller parabel.

Vi visar att $AC - B^2 = A_1 C_1 - B_1^2$ och utnyttjar följande samband

$$\begin{aligned}B \sin 2q &= 2B \sin q \cos q \\ -A \sin 2q &= -A \sin q \cos q \\ C \sin 2q &= C \sin q \cos q \\ -B \sin 2q &= -2B \sin q \cos q.\end{aligned}$$

Efter en del räkningar och med hjälp av trigonometriska formler så får vi att

$$\begin{aligned}
A_1 C_1 - B_1^2 &= (A \cos^2 \mathbf{q} + 2B \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + C \sin^2 \mathbf{q})(A \sin^2 \mathbf{q} - 2B \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + C \cos^2 \mathbf{q}) - \\
&(-A \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + B(\cos^2 - \sin^2 \mathbf{q}) + C \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q})^2 = AC \cos^4 \mathbf{q} + AC \sin^4 \mathbf{q} + \\
&(A^2 - 4B^2 + C^2) \sin^2 \mathbf{q} \cos^2 \mathbf{q} + (2BC - 2AB) \sin \mathbf{q} \cos^2 \mathbf{q} + (2AB - 2BC) \sin^3 \mathbf{q} \cos \mathbf{q} - \\
&(-A \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} + B(\cos^2 \mathbf{q} - \sin^2 \mathbf{q} + C \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q}))^2 = AC \cos^4 \mathbf{q} + AC \sin^4 \mathbf{q} \\
&- 4B^2 \sin^2 \mathbf{q} \cos^2 \mathbf{q} - B^2(\cos^2 \mathbf{q} - \sin^2 \mathbf{q})^2 + 2AC \cos^2 \mathbf{q} \sin^2 \mathbf{q} = \\
&AC(\cos^2 \mathbf{q} + \sin^2 \mathbf{q})^2 - B^2 \sin^2 2\mathbf{q} - B^2 \cos^2 2\mathbf{q} = AC - B^2.
\end{aligned}$$

Vi kan nu med hjälp av att bara beräkna $AC - B^2$ se vad ekvationen betyder geometriskt.

Den allmänna ekvationen

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

kan enligt ovan med hjälp av en koordinattransformation överföras i

$$A_1 x_1^2 + C_1 y_1^2 + F_1 = 0.$$

eller

$$C_1 y_2^2 + 2D_1 x_2 = 0$$

I första fallet får vi en ellips om $A_1 C_1 - B_1^2 = A_1 C_1 > 0$ om F_1 inte har samma tecken som A_1 och C_1 .

Om $A_1 C_1 - B_1^2 = A_1 C_1 < 0$ har vi en hyperbel om $F_1 \neq 0$, om $F_1 = 0$ så får vi två skärande räta linjer.

I de båda andra fallen har vi en parabel eller en rät linje. Samtidigt är $A_1 C_1 - B_1^2 = A_1 C_1 = 0$.

Vi sammanfattar resultaten i en sats.

Sats:

Ekvationen

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

betyder geometriskt

- en ellips, punkt eller ingenting om $AC - B^2 > 0$.
- en hyperbel eller två skärande räta linjer om $AC - B^2 < 0$.
- en parabel, två parallella räta linjer eller ingenting om $AC - B^2 = 0$.

Exempel 1:

Vilken kurva beskriver ekvationen.

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$$

Här är $A = 1$, $B = -1$ och $C = 4$ och om vi sätter in dessa värden i formeln får vi

$1 \cdot 4 - 1 = 3 > 0$ och kurvan är av ellips typ.

Att kurvan verkligen är en ellips ser vi genom att visa att ekvationen satisfieras av minst två punkter (t. ex $(3 + \sqrt{10}, 0)$ och $(3 - \sqrt{10}, 0)$).

Exempel 2:

Bestäm utseendet av $f(x, y) = 0$ om

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + y^2 + 2ax.$$

Om vi sätter $A = a$, $B = 1$ och $C = 1$, och enligt formeln $AC - B^2 = a - 1$. Punkterna $(0, 0)$ och $(-2, 0)$ ligger på kurvan.

Vi får olika fall, först då $a > 1$, får vi en ellips, om $a < 1$ en hyperbel och $a = 1$ så får vi en parabel.

Vi säger att en allmän andragradsekvationen är av

ellipstyp, om $AC - B^2 > 0$

hyperbeltyp om $AC - B^2 < 0$

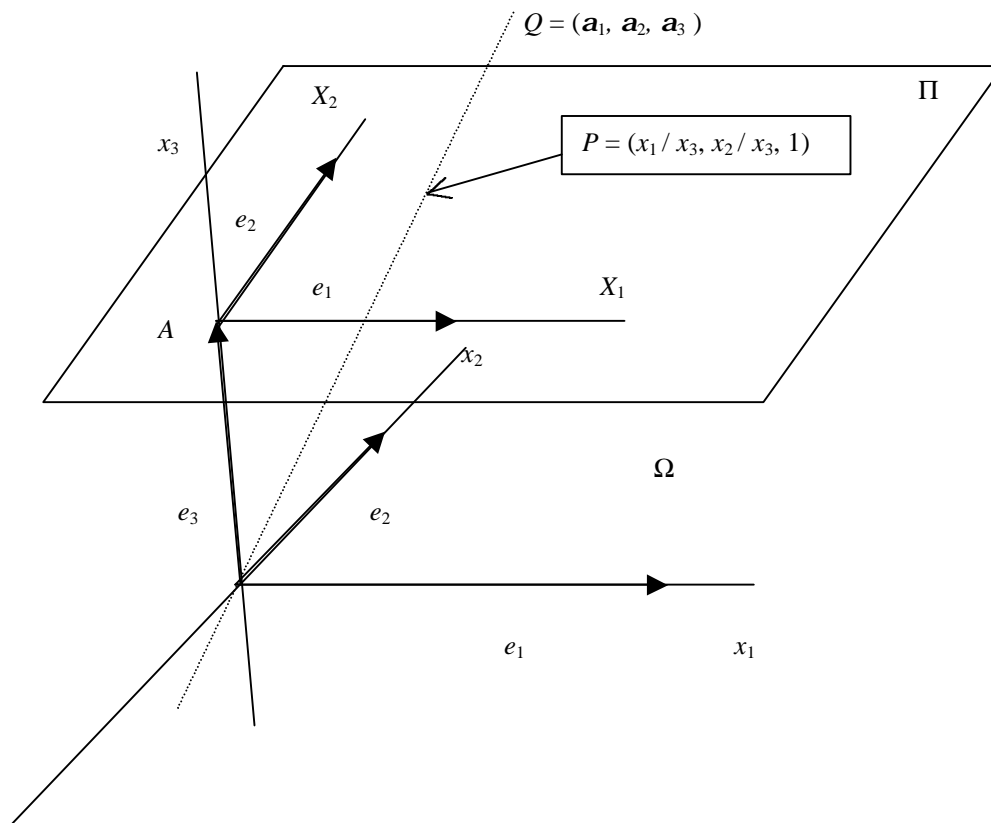
parabeltyp om $AC - B^2 = 0$.

3 Kägelsnitt, homogena koordinater och projektiv geometri

3.1 Homogena koordinater

För att få en mer enhetlig analytisk framställning av kägelsnitten så inför vi så kallade homogena koordinater i planet.

Låt e_1 , e_2 och e_3 vara en bas i rummet och låt Ω vara det plan som bildas av x_1 - och x_2 -axlarna. Vi lägger in ett plan Π parallellt med x_1x_2 -planet genom punkten $A = (0, 0, 1)$.



Varje punkt P i planet Π svarar mot en rät linje genom origo på följande sätt: Om $Q = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ är en punkt så svarar den mot den räta linjen

$$\begin{cases} x_1 = \mathbf{a}_1 t \\ x_2 = \mathbf{a}_2 t \\ x_3 = \mathbf{a}_3 t. \end{cases}$$

Om (x_1, x_2, x_3) är en punkt på linjen så har P koordinaterna $(x_1 / x_3, x_2 / x_3, 1)$.

Den räta linjen genom origo som är parallellt med Π skär inte Π i en vanlig punkt.

Vi säger att varje linje genom origo som är parallell med Π svarar mot en oändlighets punkt och alla oändlighetspunkter bildar den så kallade oändlighetslinjen.

En oändlighetspunkt svarar mot en linje

$$\begin{cases} x_1 = \mathbf{a}_1 t \\ x_2 = \mathbf{a}_2 t \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

och oändlighets linjen mot planet $x_3 = 0$.

Vi säger att (x_1, x_2, x_3) är de homogena koordinaterna för P . Det är klart att P har de homogena koordinaterna (x_1, x_2, x_3) så har P också koordinaterna (kx_1, kx_2, kx_3) där $k \neq 0$.

Homogena koordinater är ett viktigt begrepp i den så kallade projektiva geometrin där man studerar egenskaper som inte ändras genom centralprojektion.

3.2 Kägelsnittens ekvationer i homogena koordinater

Vi studerar samma andragradsekvation som innan dvs

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Eftersom ovanstående ekvation är inhomogen så kan det vara en fördel att "skriva om" ekvationen så att den blir homogen. Vi inför därför homogena koordinater

$$(x_1, x_2, x_3)$$

där

$$x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Vi får då

$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 + 2Dx_1x_3 + 2Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0.$$

Och inför beteckningarna:

$$A = a_{11}, B = a_{12} = a_{21}, C = a_{22}, D = a_{13} = a_{31}, E = a_{23}, F = a_{33}.$$

Då kan vi uttrycka vänsterledet med en summa

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3^2$$

där $a_{ik} = a_{ki}$.

Vi kan också skriva ekvationen med hjälp av s.k matriser och sätter

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

och vi kan skriva ekvationen

$$X^t AX = 0$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vi studerar nu skärningarna mellan oändlighetslinjen och andragradskurvan, dvs vi sätter $x_3 = 0$;

$$X^t AX = \sum_{i,k=0}^3 a_{ik} x_i x_k.$$

Då får vi ekvationen

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Om $a_{11} \neq 0$ har lösningarna

$$x_1 = \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}} \pm \sqrt{\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} - \frac{a_{22}}{a_{11}}} \right) x_2 = \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}} \pm \frac{\sqrt{-D}}{a_{11}} \right) x_2$$

där

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = AC - B^2.$$

Om $D > 0$ så saknar ekvationen lösning dvs kurvan skär inte oändlighetslinjen. Men enligt avsnitt 2 är kurvan en ellips om $D > 0$ ¹.

Om $D < 0$ dvs

¹ Talet $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ förekommer i många andra sammanhang, bl. a vid beräkning av areor och lösningar av ekvationssystem. Talet D kallas determinant och betecknas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

så har vi två lösningar dvs två skärningar med oändlighetslinjen och kurvan är enligt föregående en hyperbel. Vi kommer att tolka detta geometriskt i nästa avsnitt.

Och $D = 0$ dvs

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

så har vi en enligt vad vi tidigare visat en parabel, ekvationen ovan har en dubbelrot. Kurvan skär alltså oändlighetslinjen i en punkt.

Om $a_{11} = 0$ och $a_{12} \neq 0$ så är $D = -a_{12}^2 < 0$ och vi har en hyperbel. Skärningen med oändlighetslinjen ger då av ekvationen

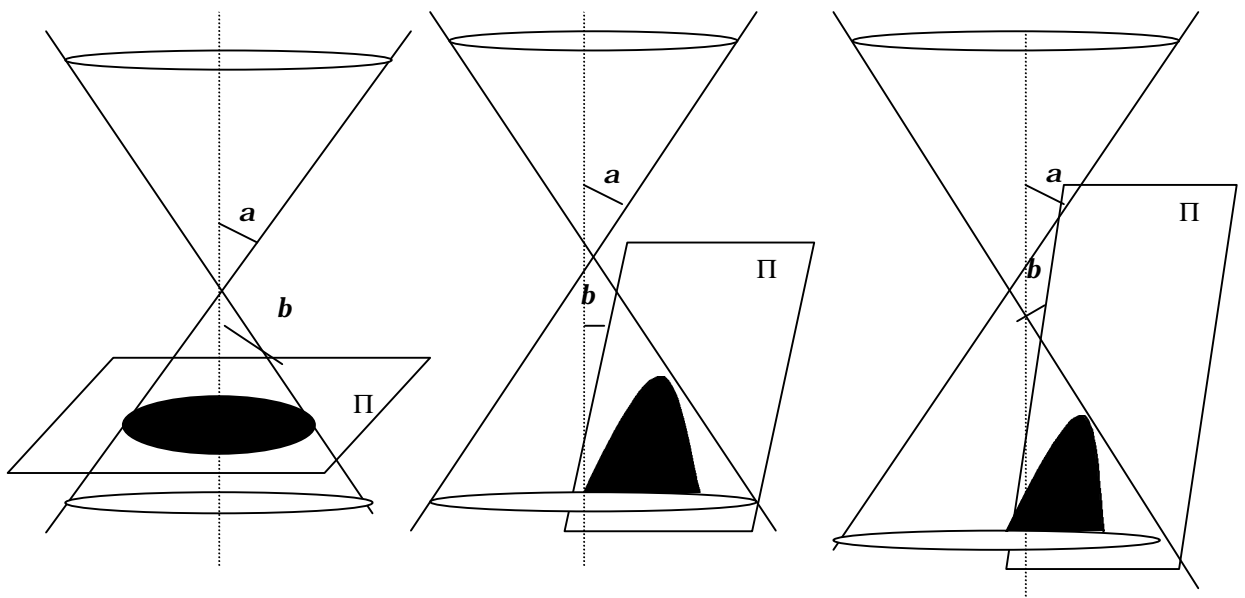
$$2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = x_2(2a_{12}x_1 + a_{22}x_2) = 0$$

dvs $x_2 = 0$ eller $2a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0$. Vi får två oändlighetspunkter som svarar mot två skärandeliner genom origo.

Om $a_{11} = a_{12} = 0$ så är $D = 0$ och vi har en parabel. Skärningen med oändlighetslinjen är $a_{11}x_2^2 = 0$ den oändlighetspunkt som svarar mot $x_2 = 0$.

3.3 Kägelsnitt i projektiv geometri

I ett tidigare avsnitt såg vi att ett kägelsnitt kunde tolkas som en skärning mellan ett plan och en cirkulär dubbelkon (en kägla).

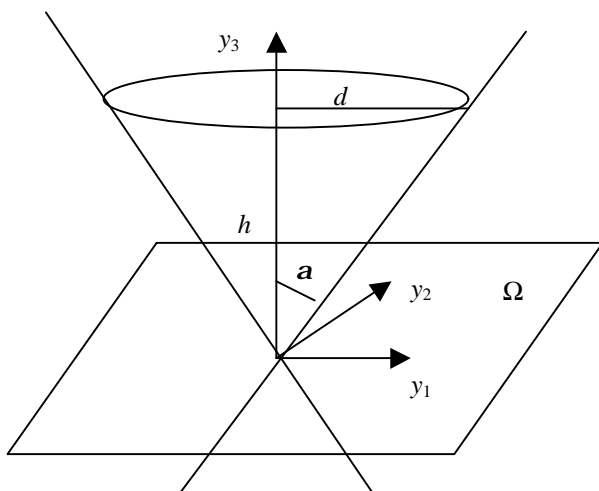


Vi inför ett rätvinkligt koordinatsystem (e_1, e_2, e_3) sådant att e_1 och e_2 är parallella med Π och $e_3 = OA$, där A ligger i planet.

Vi går nu över till homogena koordinater. Punkten P i kägelsnittet svarar då mot de linjer genom origo som genererar konen. Det betyder att kägelsnittets homogena koordinater satisfierar dubbelkonens ekvation.

Vi bestämmer dubbelkonens ekvation och inför först nya koordinater (y_1, y_2, y_3) så att konens axel blir parallell med y -axeln. Koordinatbytet ges då av

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ y_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{cases}$$



Punkten P på konen karakteriseras av att

$$d = h \tan a$$

där d är avståndet från en punkt på axeln och h är avståndet från punkten till y_1y_2 -planet. Vi kvadrerar likheten och utnyttjar att $d^2 = y_1^2 - y_2^2$, $h^2 = y_3^2$. Då får vi

$$y_1^2 + y_2^2 = ky_3^2$$

eller

$$y_1^2 + y_2^2 - ky_3^2 = 0.$$

Vi övergår till x_1, x_2 och x_3 -koordinater och får då en andragradsekvation av typen

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 = 0$$

som alltså är ekvationen för vårt kägelsnitt i homogena koordinater. Detta stämmer med tidigare resonemang. Vi kan också säga att vi nu bevisat att snitten i konen utgör en ellips, en parabel eller en hyperbel.

Vi kan också vidare se hur planet Π skär oändlighetslinjen i de olika fallen. Vi får då tre fall:

Fall ett.

Då vi har en ellips skär inte konen planet Ω , som går genom konens spets och är parallellt med Π . Oändlighetslinjen svarar mot planet Ω och kägelsnittet mot konens generatriser.

Fall två.

I parabelfallet skär planet Ω konen längs en generatris som då svarar mot den oändlighetspunkt som ligger på parabeln.

Fall tre.

I hyperbelfallet skär planet Ω konen längs två generatriser som svarar mot två oändlighetspunkter som ligger på hyperbeln.

4. Några historiska kommentarer

Nu när vi lärt oss så mycket om kägelsnittet så kan det vara intressant att veta hur det hela började. Vi går tillbaka i tiden till ca 375 f. Kr. Då levde det en matematiker vid namn Menaikmos som upptäckte kägelsnittet då han ville lösa problemet med kubens fördubbling. Sidan av en kub med volymen 2 kunde han beskriva som skärningen mellan en hyperbel och en parabel. Vi kan inse det på följande sätt:
Om den sökta sidan är x så gäller

$$x^2 = 2$$

eller

$$x = \frac{2}{x}.$$

Den sökta sidan är alltså x -koordinaten för skärningspunkten mellan parabeln $y = x^2$ och hyperbeln $y = 2/x$.

En nästan fullständig teori av kägelsnitten skapades av Apollonios (260 – 170 f. Kr) från Perga i Mindre Asien. Han skrev åtta böcker. Böckernas gemensamma namn är Konika. De fyra första böckerna finns i originalspråk dvs grekiska och tre finns i översättning till arabiska. Tyvärr så är den sista åttonde boken försvunnen.

Vi flyttar oss fram till tusentalet efter kristus. Då levde det i Persien en berömd poet, astronom och matematiker som hette Omar Khayyam (1048 – 1122). Han studerade tredjegrads ekvationen och löste den med hjälp av kägelsnitt.

Den klassiska fysiken skapades under 1600-talet och de tre bekanta vetenskapsmännen var Galileo Galileio (1546 – 1642), Johannes Kepler (1571 – 1630) och Isacc Newton (1642 – 1727)

De var alla tre välbekanta med Apollonios Konica

Galilei visade med hjälp av satser i Konica att den kurva en projektil beskriver är en parabel den s.k kastparabeln. Kepler utnyttjade sina kunskaper om kägelsnitten till att visa planetbanorna är ellipser. Newton slutligen härledde sin berömda gravitationslag med hjälp av Keplers resultat och satser ur Konica.

Och senare vid 1800-talet så studerade Plücher (1801 – 1868) med flera bl.a de homogena koordinaterna för att få en enhetlig behandling av en kvadratisk ekvation.

Litteratur förteckning

Bergendahl Gunnar *Geometri och Lineär Algebra för två betyg* Första häftet.

Bergendahl Gunnar *Geometri och Lineär Algebra för två betyg* Andra häftet.

Hyltén-Cavallius Carl och Sandgren Lennart *Plan geometri* Hermods i Malmö.

Tengstrand Anders *Lineär Algebra med vektor geometri* Studentlitteratur 1994.

Tengstrand Anders *Geometri och Algebra* Växjö universitet 1997.

Thompson Jan *Historiens Matematik* Studentlitteratur Lund 1991.